EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

april 08

nr 6

jaargang 83

Wiskundeprogramma's veranderen

Wiskunde Scholen Prijs 2007

Wiskunde in Wetenschap

Digitaal toetsen

Examenbesprekingen 2008

Euclides en de hbs aflevering 1

BIJVOEGSEL
VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
VOOR WISKUNDE
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN
ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT en P. WIJDENES



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

april
08
nr 6
jaargang 83

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos, Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 52,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Ada Valkenburg
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.valkenburg@de-kleuver.nl

Kort vooraf

[Marja Bos]

In dit nummer

Met trots presenteren we in dit nummer van Euclides de eerste aflevering van een drieluik over het wiskundeonderwijs aan de hbs gedurende de periode vóór de Tweede Wereldoorlog. Martinus van Hoorn, voormalig hoofdredacteur van Euclides, verdiepte zich in dit buitengewoon interessante onderwerp en schreef er een boeiende serie over. U begrijpt al wat zijn voornaamste historische bron was én tegelijk het belangrijkste deelonderwerp van de serie: Euclides natuurlijk! In deze eerste aflevering leest u onder meer over ontstaan en eerste ontwikkelingen van de hbs, over de leraren-organisaties Liwenagel en Wimecos, over de toenmalige wiskundeleraren zelf, en over hoe het 'Bijvoegsel bij het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan Onderwijsbelangen' leidde tot het blad Euclides.

Nog meer geschiedenis in dit aprilnummer, maar dan van recentere datum: een terugblik op de wijzigingen in de wiskundeprogramma's voor havo en vwo gedurende de afgelopen tien jaar, inclusief een vooruitblik op de plannen voor de directe toekomst. Jenneke Krüger beschrijft de kort op elkaar volgende veranderingen zoals die zich in de Tweede Fase voordeden en binnenkort zullen gaan voordoen, een hinkelpad met hindernissen, van 1998 via 2007 naar 2013. In volgende nummers van Euclides zal de beschrijving van al die veranderingen wat specifieker per wiskundevak worden ingekleurd, zodat u geleidelijk het zicht (terug?) krijgt op het hele kwartet wiskunde-A/B/C/D. Voor ons juninummer staat wiskunde A op de rol.

Dat betekent natuurlijk niet, dat de andere wiskundevakken voorlopig geen aandacht krijgen. Zo laten Wim Caspers en zijn collega's van de kerngroep van de Technische Universiteit Delft u in dit aprilnummer kennismaken met lesmateriaal dat zij ontwierpen voor het domein Wiskunde in Wetenschap binnen wiskunde D. De Delftse kerngroep koos daarbij bewust voor het onderwerp 'Optimaliseren in Netwerken'.

De oproep tot deelname aan de Wiskunde Scholen Prijs levert altijd weer prachtige inzendingen op. Dit keer staat een project rond een pretpark in de schijnwerpers: Walibi! Het lesmateriaal bij dit project werd ontworpen door Adri Knop van Scholengemeenschap Tabor in Hoorn. Doe uw voordeel met de lesbrieven bij de diverse deelprojecten, speciaal gericht op klas 2 van het vmbo, maar ook bruikbaar in andere tweede klassen.

Bernadette Kruijver en Jos Tolboom laten in hun bijdrage diverse vormen van digitale toetsing de revue passeren. Digitale toetsen blijken vele voordelen te hebben, zeker ook als het gaat om zogeheten 'formatieve' toetsing, bedoeld om het leerproces bij te sturen.

Gerrit Roorda, Nelleke den Braber en Pauline Vos laten aan de hand van een verrassend probleempje zien, hoe leerprocessen over differentiaalrekening kunnen verlopen, en hoe vaste schema's ons denken in de weg kunnen zitten.

Vanuit de Vereniging laat de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakvaardig) van zich horen. Welke vakspecifieke kwaliteiten zijn van belang voor de wiskundeleraar? Wat vinden wij daar zelf van, als beroepsgroep? Hoe moet een beroepsregister voor wiskundeleraren er uit gaan zien? Gezien de impact die een dergelijk register kan krijgen is het van groot belang dat u met de projectgroep meedenkt en hen van feedback voorziet. Kwaliteitsverhoging en -bewaking van 'zittende' en 'nieuwe' wiskundeleraren (en daarmee van ons wiskundeonderwijs) is daarbij uiteraard de insteek.

Helpdesk rechtspositie

Een arbeidsconflict, een geschil in de rechtspositionele sfeer – helaas, niet ieder van ons ontkomt eraan. Nu de NVvW sinds augustus vorig jaar deel uitmaakt van de Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP, zijn er mogelijkheden om via de Vereniging ook in deze kwesties (gratis) ondersteund te worden. U vindt de contactgegevens van de NVvW-helpdesk van het Rechtspositie-Adviesbureau in het colofon, links van deze pagina.

Examenbesprekingen

Over een paar weken zitten velen van ons er weer middenin, in het correctiewerk rond de centrale eindexamens. Overleggen met collega's kan dan heel plezierig zijn. Het forum op *www.nvvw.nl* biedt daartoe uiteraard schriftelijk ruim de gelegenheid, daarnaast hebben veel collega's uitstekende ervaringen met deelname aan de bekende regionale examenbesprekingen - bovendien een extra gelegenheid om collega's van andere scholen te ontmoeten. Voor een overzicht van data en locaties zie pagina 321. Alvast veel sterkte en wijsheid gewenst met alle nakijkwerk!

Inhoud

Aan dit nummer werkte verder mee:
Marjan Doijer.

Euclides en de hbs vóór de Tweede Wereldoorlog

AFLEVERING 1

[Martinus van Hoorn]



BIJVOEGSEL
VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
VOOR WISKUNDE
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

Dr. H. J. E. BETH — Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
Dr. B. P. HAALMEIJER — Dr. D. J. E. SCHREK — Dr. P. DE VAERE
Dr. D. P. A. VERRIJP

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 1

De voorzijde van het eerste nummer

0 Inleiding

In 1924 kreeg het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* een bijvoegsel *'gewijd aan onderwijsbelangen'*. In 1927 ging dit bijvoegsel verder als zelfstandig tijdschrift onder de naam *Euclides*.

Ik richt mij in eerste instantie op het tijdschrift *Euclides* (tot 1940). Dit was allereerst het tijdschrift voor de wiskundeleraren aan hbs'en, daarin lag haar bestaansgrond. *Euclides* werd ook door wiskundeleraren aan gymnasia gelezen, die echter ten opzichte van hun collega's aan hbs'en sterk in de minderheid waren. Zodoende gaat het verhaal vooral ook over het wiskundeonderwijs aan de hbs'en. Het zal in drie afleveringen verschijnen.
Het schooltype hbs roept nostalgische reacties op. Het wiskundeonderwijs was er degelijk, maar ouderwets, volgens sommigen te ouderwets. Eind jaren '30 kwam er eindelijk een nieuw leerplan, maar differentiaal- en integraalrekening werd nog geen examenstof. [1] Er waren voortekens van meer ingrijpende veranderingen; het begrijpen van de leerstof werd sterker benadrukt en de nadruk op axioma's werd geringer.
Om deze ontwikkelingen te verhelderen zocht ik behalve in *Euclides* in andere bronnen, mede om alles in een maatschappelijke context te plaatsen. De hoofdzaak blijft het tijdschrift *Euclides*. Over de hbs geef ik uitgebreide uitleg, omdat het al veertig jaar geleden is dat dit schooltype verdween.

1 De hogere burgerschool

1.1 Ontstaan en succes

In 1863 werd de wet op het middelbaar onderwijs van kracht. Deze wet was ontworpen door de liberale staatsman Jan Rudolf Thorbecke. De hogere burgerschool (hbs), met een 3-jarige of een 5-jarige cursus, werd het belangrijkste nieuwe schooltype. [2] Voordien werd in verscheidene plaatsen al onderwijs gegeven dat inhoudelijk als middelbaar onderwijs kon worden beschouwd. [3] Maar de scholen die zulk onderwijs aanboden verschilden onderling en sommige ervan leidden een noodlijdend bestaan.

gezorgd voor spreiding van de scholen over het land. De schoolgelden werden beperkt. Naast hbs'en kwamen er enige middelbare meisjesscholen (mms'en) en handelsscholen. Het aantal leerlingen nam langzaam toe. De eerste hbs'en begonnen in 1864, in 1880 waren er 55, in 1900 waren er 64, en in 1920 waren er 126 (plus 16 lycea). Er waren eerst alleen rijksscholen en gemeentelijke scholen; bijzonder onderwijs werd pas na 1900 gesubsidieerd.

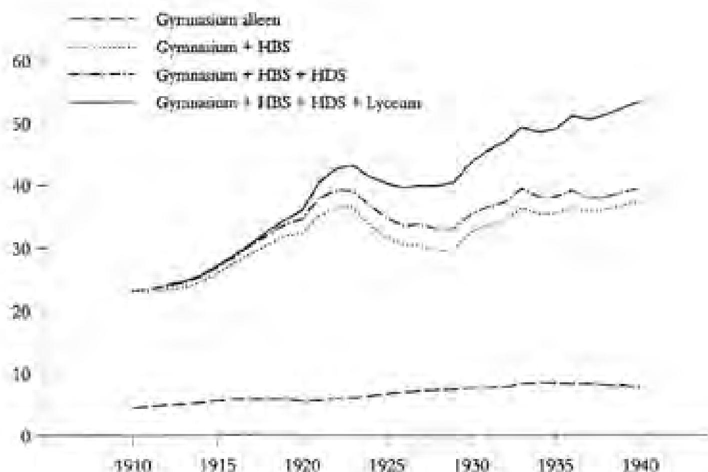


De spreiding van middelbare scholen en gymnasia in 1920. VHMO = voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs, HHS = hogere handelsschool (= 2-jarige kop op 3-jarige hbs-onderbouw), HDS = handelsdagschool, 3/4/5 j.c. = 3-/4-/5-jarige cursus. (Bron: Mandemakers, p. 201)

De wetgeving was gericht op standenonderwijs. Het gymnasium, dat tot het hoger onderwijs behoorde, was voor de geleerde stand. In 1964 zei O. Bottema: *'In 1863 zijn gymnasium en hbs gescheiden gegaan. Het scheen toen nog niet anders te kunnen, maar het was naar mijn mening tot beider schade.'* [4]
De wet van Thorbecke bracht voor de hbs'en een centraal examen en daardoor een eenheid in leerplannen, de bevoegdheden van de leraren werden geregeld, terwijl werd

De hbs bleek toegesneden op leerlingen met een exacte aanleg. Daarom stapten ook gymnasiasten over naar de hbs. Hbs'ers konden rechtstreeks naar de Polytechnische School te Delft (voorloper van de TU), maar niet naar een universiteit. Toch gingen meteen hbs'ers, via een staatsexamen Grieks en Latijn, naar de universiteit. Pas vanaf 1917 werden hbs'ers, door een initiatiefwet van het Kamerlid Limburg, rechtstreeks toegelaten

tot examens in de faculteiten wiskunde en natuurwetenschappen en geneeskunde. In de begintijd van de hbs waren de maatschappelijke verschillen groot. Gymnasia en hbs'en werden door enkele procenten van de jongeren bezocht - en vrijwel uitsluitend door jongens. Veelzeggend is dat de Kinderwet-Van Houten, die arbeid door kinderen jonger dan 12 jaar verbood, dateert van 1874.



Aantal 12- tot 18-jarigen per 1000 dat leerling is van een hbs of gymnasium. De bobbel in de grafieken heeft te maken met werkloosheid tijdens en na WO I, ook onder jongeren. (Bron: Mandemakers, p. 81)

rangnr. 1870		rangnr. 1910	bevolking per 1-1-1870	bevolking per 1-1-1910	1880	1890	1900	1910
1.	Amsterdam	1.	264694	568130	120	154	193	215
2.	Rotterdam	2.	116232	417780	129	174	274	359
3.	Den Haag	3.	90277	270109	127	174	226	299
4.	Utrecht	4.	59299	118386	118	142	172	200
5.	Leiden	8.	38943	58221	106	111	138	150
6.	Groningen	5.	38528	76282	112	145	173	198
7.	Arnhem	7.	31626	64685	130	157	180	205
8.	Haarlem	6.	30530	70299	124	165	210	230
9.	Maastricht	12.	27808	37502	106	115	123	135
10.	Leeuwarden	13.	25121	36511	113	121	128	145
11.	Dordrecht	11.	24651	46295	111	132	156	188
12.	Den Bosch	15.	24315	35137	104	112	126	145
13.	Nijmegen	9.	22842	55828	109	141	187	244
14.	Delft	17.	21836	34234	117	130	145	157
15.	Tilburg	10.	21431	50326	132	158	190	235
16.	Zwolle	18.	20408	34224	110	129	150	168
	1 t/m 16				120	151	193	230

De bevolkingsgroei in zestien Nederlandse steden in de periode 1870-1910. Bevolking op 1-1-1870 = 100. De totale Nederlandse bevolking steeg in de periode 1870-1910 van 3,6 naar 5,9 miljoen. (Bron: P. Kooij, Groningen 1870-1914. Assen, 1987)

Jaar	HBS-A/B 5/6 j.c.	HBS 3 j.c.	Handelsdag-scholen	HHS[a]	Lycea	Middelbare meisjesscholen	Totaal
1870	32	11	-	(-)	-	1	44
1880	37	18	-	(1)	-	12	67
1890	37	23	-	(2)	-	12	72
1900	41	23	-	(5)	-	12	76
1910	58	27	9	(12)	1	16	111
1915	73	19	11	(17)	2	19	124
1920	102	24	28	(27)	16	18	188

a Daar de onderbouw van de HHS al bij de andere schooltypen is opgenomen, is de HHS niet inbegrepen bij het totale aantal scholen.

Aantal middelbare scholen. Een hbs met 6-jarige cursus ontstond als een mms een hbs-afdeling toevoegde met gezamenlijke 2-jarige onderbouw. (Bron: Mandemakers, p. 69)

Ondanks een groeiende toestroom werden in de jaren '30 de hbs'en en gymnasia nog bezocht door minder dan 10 % van alle jongeren.

Verondersteld wordt dat door de hbs velen die anders verstoken waren gebleven van zulk degelijk onderwijs, een fraaie loopbaan in wetenschap of techniek konden opbouwen. De meeste Nederlandse Nobelprijswinnaars van vóór WO II waren leerling geweest van een hbs, namelijk Van 't Hoff, Lorentz, Kamerlingh Onnes, Zeeman en Debije.[5] Eveneens hbs'ers waren de ontdekker van de Java-mens Eugène Dubois, de grote man van de Zuiderzeewerken Cornelis Lely en de schaakgrootmeester Max Euwe, alsmede de wiskundigen Brouwer, Struik en Van der Waerden. Dubois en Debije kwamen uit rooms-katholieke families, die over hun reserves jegens de 'liberale' hbs waren heengestapt.
Scholen toonden zich trots op abituriënten die ver waren gekomen. Vóór het hbs-gebouw aan de 's-Gravendijkwal te Rotterdam kwam een groot beeld van Van 't Hoff. Hij had als leerling buiten schooltijd zelfs in de school ingebroken om scheikundeproeven te doen.

1.2 Nieuwe scholen na 1900

Na 1900 werden door twee hoofdoorzaken veel nieuwe scholen opgericht. Ten eerste was de Nederlandse bevolking enorm toegenomen, vooral door verbeterde hygiënische omstandigheden. Tussen 1870 en 1910 was de bevolkingstoename 65%, en in veel steden en ontginningsgebieden was deze groter. Nieuwe hbs'en moesten de toeloop opvangen. Ten tweede kwam het rooms-katholiek en protestants-christelijk onderwijs op. In 1930 had een derde van de gymnasia en hbs'en een confessionele grondslag.

Voeg hierbij dat vanaf 1910 de meeste 3-jarige hbs'en werden uitgebreid tot 5-jarige, dat vanaf 1911 mms'en een hbs-afdeling konden toevoegen, dat de deelname van meisjes overal toenam, en dat hbs'ers sinds 1917 rechtstreeks naar de universiteit konden, dan is duidelijk dat de hbs succesvol was geworden. Vanaf 1923 konden bovendien A-afdelingen worden toegevoegd; de oorspronkelijke hbs-opleiding werd toen hbs-B genoemd.

De subsidiëring was niet de enige factor bij de oprichting van confessionele hbs'en. Vooral in protestants-christelijke kring werd de hbs lang gezien als te zeer op het materiële gericht. Ingenieurs, onder wie veel hbs'ers werden geteld, '*hielden van het*

idee dat de mens de baas van de werkelijkheid is'. [6] Maar het maatschappelijk succes van hbs'ers werd terdege opgemerkt en zorgde voor een bredere acceptatie.
Naast categorale scholen waren er lycea, waarin een gymnasium- en een hbs-opleiding waren samengebracht. Het oudst was het Nederlandsch Lyceum in Den Haag uit 1909. Rector was de pedagoog Rommert Casimir, die meende dat de combinatie van klassieke en moderne vorming de leerlingen ten goede zou komen. [7] President-curator was het liberale Kamerlid Joseph Limburg, bekend van zijn initiatiefwet.



Limburg (1866-1940) (Bron: www.parlement.com/9291000/biof/00822)

De overheid stimuleerde de vorming van lycea niet. De inspectie zag erop toe dat gymnasium- en hbs-klassen gescheiden bleven. '*De rest van onderwijskundig Nederland volgde het experiment met hoofdschudden, het bekende schudden, dat veelal zo moeilijk van knikkebollen is te onderscheiden.*' [8] Een voordeel van een lyceum was dat leraren gemakkelijker een volle baan konden krijgen. Zo speelden principiële en pragmatische argumenten dooreen. Diverse argumenten golden ook bij de toelating van meisjes, die nog sterk in de minderheid waren. Zij telden natuurlijk mee, en hielpen zo kleine scholen in stand te houden.

1.3 Niveaubewaking

De nieuwe hbs'en moesten voldoende leerlingen zien te vinden. Er moest ook een minimaal aantal bevoegde leraren zijn, maar verscheidene nieuwe leraren waren nog niet bevoegd. Dit alles werd vanuit de oudere hbs'en met argusogen bekeken. Al eerder was wel gesteld dat het niveau van de leerlingen te wensen overliet, maar nu leek er meer reden tot bezorgdheid. Zou de kwaliteit van de hbs kunnen worden behouden?
In 1919 was het gymnasiumprogramma gemoderniseerd. Door de wet-Limburg waren hbs'en en gymnasia met elkaar in concurrentie geraakt en de gymnasia wilden hun positie als reguliere vooropleiding voor de universiteit zeker stellen.
De hbs'en moesten hun nieuwe status, als vooropleiding voor twee universitaire faculteiten, waarmaken. Zij moesten hun niveau bewaken. Daarbij had in 1920 de minister het toelatingsexamen voor de hbs afgeschaft (het werd in 1928 weer ingevoerd). [9]
Om het niveau te handhaven was geregeld vakinhoudelijk overleg tussen leraren uit het land wenselijk. Zo bezien is het logisch dat organisaties van vakleraren tot stand kwamen.

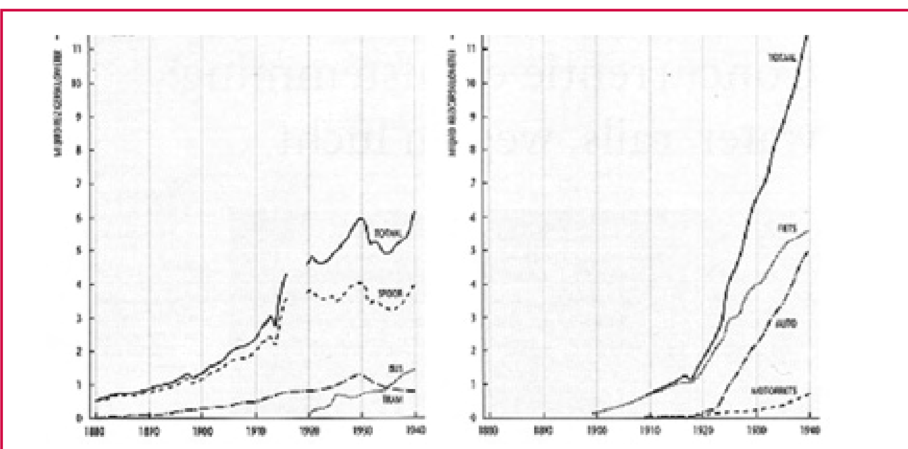
1.4 Liwenagel en Wimecos

In 1921 werd de groep Liwenagel (= leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) gevormd, als onderafdeling van het 'Genootschap' van gymnasium- en lyceumleraren. In 1925 werd de vereniging Wimecos (= wiskunde, mechanica, kosmografie) opgericht, voor leraren in deze vakken aan middelbare scholen. De start van het tijdschrift *Euclides* in 1924 past hier naadloos bij. Leraren aan mulo en nijverheidsonderwijs deden niet mee; zij mochten trouwens geen leraar heten, zij waren onderwijzers met een LO-akte.
De naam Wimecos was een actieplan; nadrukkelijk werden mechanica en kosmografie - op de hbs afzonderlijke vakken - genoemd. Mechanica was 'klassieke' (newtoniaanse) mechanica. Er was discussie over de positie van dit vak op de hbs. De strijd om de mechanica is elders beschreven. [10] Een 'machtsgreep' door de fysici werd voorkomen, mechanica bleef klassieke mechanica. Kosmografie bleef in de vierde klas. Op het gymnasium was in 1919 mechanica ondergebracht bij natuurkunde, en kosmografie afgeschaft. Daarvoor hanteerde men vakinhoudelijke en pedagogische argumenten. [11]
Een andere kwestie was dat wiskunde geen examenvak leek te worden voor hbs-A. Dit was voor sommigen een reden tegen hbs-A te zijn. De exacte vorming van de hbs zou niet meer centraal staan. De naam *Euclides* was ook veelzeggend.
Liwenagel verenigde leraren wiskunde, natuurkunde, scheikunde en natuurlijke historie. Met alleen wiskunde zou Liwenagel te klein zijn. In 1920 waren er 48 gymnasia - waarvan vele erg klein - plus 16 lycea. Op de gymnasia hadden alle bètavakken eenzelfde belang tegenover de overheersende klassieke talen. Liwenagel had daardoor een wat ander doel dan Wimecos.
Ondanks de verschillen tussen gymnasium en hbs werkten meerdere leraren aan beide schooltypen en anderen wisselden ertussen. In kleinere plaatsen met zowel een gymnasium als een hbs werkten konden deze scholen samen iemand een volle baan bezorgen. Aan één lerarenorganisatie voor hetzelfde vakgebied viel echter niet te denken.

Bij de totstandkoming van de organisaties speelde een heel andere factor mee. Nederland had rond 1925 een dicht net van tramlijnen en spoorwegen. Vanuit het hele land kon je naar Utrecht of Amsterdam reizen en dezelfde dag weer naar huis. Voorheen kon dat niet. Tekenend in dit verband is een besluit uit 1875 van de 'Vereeniging van Leeraren aan Inrichtingen van Middelbaar Onderwijs', om de hoofdbestuursleden gedurende telkens drie jaar te rekruteren uit één landstreek vanwege *'de moeilijkheden om hoofdbestuursleden uit verschillende streken van het land te doen vergaderen en het bezwaar van de daaraan verbonden kosten'.* [12]
Ook de fiets was van grote betekenis. Leraren en leerlingen gebruikten graag de fiets. Zo werden spoorwegstations en scholen beter bereikbaar. [13]

1.5 Het tijdschrift *Euclides*

De interesses van hbs- en gymnasiumleraren waren zoals gezegd grotendeels dezelfde.



Het passagiersvervoer 1880-1940, links openbaar vervoer, rechts particulier vervoer (Bron: Techniek in Nederland in de twintigste eeuw, deel 5, p. 20)

De zeer productieve schoolboekenauteur Pieter Wijdenes (1872-1972) zag ruimte voor een tijdschrift. Hij had in 1913 het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* opgericht, bestemd voor degenen die een akte-examen (K I of K V) wilden afleggen. Het bevatte veel vraagstukken en uitgewerkte examenopgaven. Het *Nieuw Tijdschrift* had andere bladen overvleugeld. Ook niet-studerende leraren lazen het. [14]



Algemene Vergadering van de 'Vereeniging van leeraren aan inrichtingen van Middelbaar Onderwijs' (Almelo 1905), tijdens een uitstapje op de derde dag. Vooraan zittend, 2e van rechts P. Wijdenes. (Bron: Honderd jaar A.V.M.O. Gedenkboek 1867-1967 (z.p. 1967), p. 29)

Wijdenes was een selfmade man, begonnen als onderwijzer, en door aktestudie eerstegraads leraar geworden. [15] De hoogleraren Korteweg en Van Pesch van de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam regelden hun collegetijden naar zijn middagpauze als onderwijzer. In 1925 gaf hij het leraarschap op; zijn leerboeken verschaften hem voldoende inkomsten. Bij de aanloop naar het wetenschappelijk tijdschrift *Compositio Mathematica* op initiatief van L.E.J. Brouwer trad Wijdenes op als adviseur van uitgever Noordhoff te Groningen. Brouwer en Noordhoff overlegden bij Wijdenes thuis in Amsterdam. [16]
Wijdenes' leerboeken alsmede het *Nieuw Tijdschrift* werden uitgegeven door Noordhoff. Laatstgenoemde voegde, na een initiatief van Wijdenes, in 1924 aan het *Nieuw Tijdschrift* een bijvoegsel toe *'gewijd aan onderwijsbelangen'*. Directe aanleiding was een stuk van E.J. Dijksterhuis - waarover hierna meer.
Het bijvoegsel stond volgens het titelblad onder leiding van J.H. Schogt en P. Wijdenes. Johannes Herman Schogt (1892-1958) werd in 1925 secretaris van de kersverse vereniging Wimecos. Daarom was hij zeer welkom. Wijdenes kon geen lid van Wimecos worden aangezien hij het leraarschap had opgegeven. Omdat Wijdenes en Schogt beiden in Amsterdam woonden was overleggen eenvoudig. Zonder twijfel had Wijdenes net als bij het *Nieuw Tijdschrift* ook bij het bijvoegsel de touwtjes in handen. Medewerkers van het bijvoegsel waren H.J.E. Beth te Deventer, E.J. Dijksterhuis te Oisterwijk, B.P. Haalmeijer te Amsterdam, D.J.E. Schrek te Utrecht, P. De Vaere te Brussel en D.P.A. Verrijp te Arnhem. Beth en Dijksterhuis komen hierna aan bod. Haalmeijer was leraar aan dezelfde hbs als Schogt. De Vaere kende België, waar belangstelling voor het bijvoegsel kon bestaan. Schrek en Verrijp waren gymnasiumleraren – aan deze groep was duidelijk gedacht; Verrijp was voorzitter van Liwenagel.
Na drie jaar durfde Noordhoff verzelfstandiging van het bijvoegsel aan, dat verder ging als *Euclides*. Onbekend is hoeveel van de wiskundeleraren aan hbs'en abonnee waren. Maar *Euclides* mag sowieso worden gezien als hét tijdschrift van de Nederlandse wiskundeleraren, die in meerderheid aan een hbs werkten – het aantal gymnasia was veel geringer en de gymnasia waren bovendien kleinere scholen dan de hbs'en.
Al gauw kreeg *Euclides* twee nieuwe medewerkers, namelijk G.C. Gerrits, hbs-directeur te Amsterdam en voorzitter van de vereniging Velines van natuur- en scheikundeleraren, alsmede W.P. Thijssen te Bandoeng, Indië hoorde er ook bij.
Interessant is Gerrits' positie in de strijd om de mechanica. Hij was bevoegd voor zowel wiskunde en mechanica als ook natuurkunde. In 1928 besprak hij in *Euclides* het rapport van een commissie die zich gebogen had over het natuurkundeonderwijs aan hbs'en. In dat rapport werd bepleit mechanica onder te brengen bij natuurkunde. Gerrits schreef: *'De mechanica is dat deel van de natuurwetenschap, dat zich grotendeels aan het experimentele onderzoek onttrokken heeft; op scherpe definities en nauwkeurig opgestelde hypothesen is de mechanica opgebouwd. Haar methode is niet meer de fysische, die de commissie voorstaat.'* Deze opvatting werd vast door veel wiskundigen gewaardeerd.

1.6 De leraren

Veel leraren hadden gecombineerde bevoegdheden, waardoor zij meer kans hadden op een volledige baan. Het behalen van een extra of hogere bevoegdheid werd aangemoedigd. Avondstudie was gewoon. Heel wat leraren promoveerden. De doctorandustitel werd nauwelijks gebruikt, een doctorandus (= 'hij die doctor wordt') heette nog niet gereed met de studie. Vermoedelijk werd geleidelijk de wenselijkheid van het promoveren minder ingezien. Ingenieurs hoefden niet te promoveren. Een hogere opleiding werd vaak in het salaris verdisconteerd.
Met de akte K I (het latere MO-A wiskunde) was men bevoegd voor een 3-jarige hbs en niet voor een 5-jarige hbs, ook niet voor de eerste drie leerjaren daarvan; daartoe was K V (MO-B wiskunde) nodig. Dat bleef eerst zo toen veel 3-jarige hbs'en werden omgezet in 5-jarige. [17]

De vakinhoudelijke kennis van de leraren stond hoog aangeschreven. Over hun lessen bestaan veel positieve verhalen. Soms wordt echter in een gedenkboek besmuikt over ordeproblemen geschreven. Aktebezitters, opgeleid als onderwijzer, hadden de beste reputatie als pedagoog. [18]
Rond 1925 boden de middelbare scholen zo'n 250 volle wiskundebanen, terwijl zo'n 400 leraren er wiskunde gaven. [19] Velen gaven tevens een ander vak. Directeuren gaven ook les. Minder dan 10% van de wiskundeleraren waren vrouwen, van wie de meesten werkten aan mms'en en meisjes-hbs'en. Ongeveer 100 leraren werden lid van de nieuwe vereniging Wimecos.
Hadden leraren een hogere status dan nu? Dit geldt zeker in zoverre, dat zij behoorden tot de hoger opgeleiden, destijds een weinig omvangrijke groep. In kleinere plaatsen werden de hbs- en gymnasiumleraren gekend. Eind jaren ´20 waren er toch klachten: *'Sinds 1923 merkt men vrijwel ieder jaar een nieuwe achteruitzetting van de leraarsstand op. Wij vragen ons af of de Nederlandse regering nog wel beseft, dat het middelbaar*

Jaar	Gymnasium (gemeentelijk)				HBS 3/4/5 j.c.			
	Aantal scholen	Aantal klassen	Aantal leerlingen /school	/klas	Aantal scholen	Aantal klassen	Aantal leerlingen /school	/klas
1880	29	178	59,7	9,7	57	296	78,4	15,1
1890	29	211	89,3	12,3	62	337	95,6	17,6
1900	29	201	77,3	11,2	65	449	139,4	20,2
1910	30	210	78,2	11,2	85	703	161,5	19,5

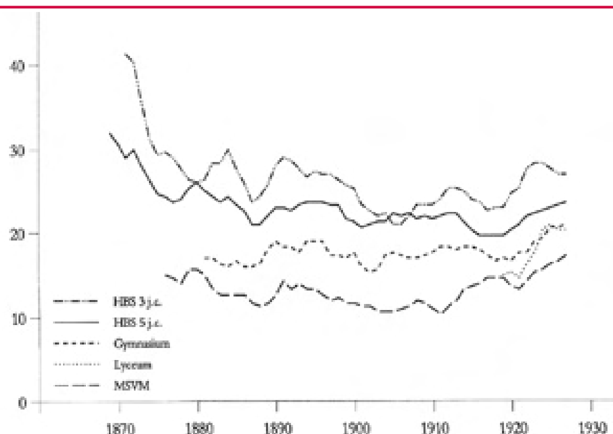
Het aantal scholen, het aantal klassen en het aantal leerlingen per school en per klas 1880-1910. In 1880 hadden de gymnasia samen 1730 leerlingen en de hbs'en 4470. Voor 1910 zijn deze getallen 2350 en 13710. (Bron: Mandemakers, p. 160)

onderwijs is een nationale zaak van de eerste orde, waarmee de toekomst van ons gehele volk is gemoeid.'[20]

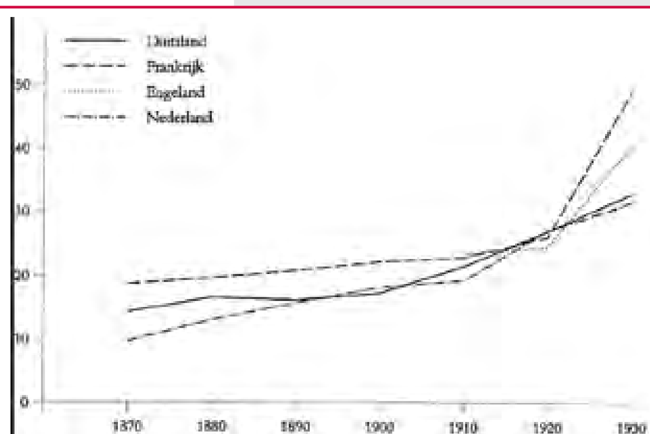
1.7 Selectie

Het onderwijs aan de hbs'en was selectief. Slechts circa 50% van de toegelaten leerlingen haalde het einddiploma van de 5-jarige hbs, en dat vaak niet in minimale tijd. Het was heel gewoon als in alle leerjaren 20 tot 25% van de leerlingen doubleerde. Hierbij moet men bedenken dat veel leerlingen tevreden waren met drie jaar hbs. Zij konden daarna naar de kweekschool of een andere opleiding, dan wel een baan zoeken - wat vaak voorkwam. In 1923 werd voor de rijksscholen afgekondigd dat wie zonder bijzondere redenen tweemaal in hetzelfde leerjaar bleef zitten van school moest.

Toen omstreeks 1920 het aantal leerlingen op de hbs'en was toegenomen, nam de uitval toe. Dit zou men in verband willen brengen met de afschaffing van het toelatingsexamen, maar de uitval was al verminderd toen het toelatingsexamen nog niet in ere was hersteld. Een 'verklaring' hiervoor is de wet van Posthumus: het percentage doubleurs blijft altijd gelijk, ongeacht de regelgeving. Maar dit is niet aangetoond.
Zes klassen lagere school werden meestal niet toereikend geacht voor het toelatingsexamen. Er waren daarom lagere scholen met kopklassen. Ook deden veel potentiële hbs'ers eerst een jaar mulo. De eersteklassers van een hbs waren rond 1900 gemiddeld ruim 14 jaar. De instroomleeftijd daalde geleidelijk.
Voor de minder getalenteerden was de hbs een hindernisbaan. In gedenkboeken komen misschien vooral succesvolle oud-leerlingen aan het woord, die logischerwijze tevreden waren. Een humaner schoolsysteem werd voorgestaan door onder meer de natuurkundige en pedagoog Ph.A. Kohnstamm en de mensen rond het Nederlandsch Lyceum. [21]
De toestroom naar hoger of middelbaar secundair onderwijs steeg in Nederland, tot WO II, slechts langzaam. In enkele andere landen (met name Engeland en Frankrijk) vond omstreeks 1930 een omslag plaats, waardoor veel meer leerlingen naar zulk onderwijs gingen. Denkelijk werd in die landen het voortzetten van de schoolloopbaan bewust gestimuleerd.



Het percentage doubleurs op verschillende schooltypen. MSVM = middelbare school voor meisjes. (Bron: Mandemakers, p. 139)



De toestroom naar hoger of middelbaar secundair onderwijs in Duitsland, Frankrijk, Engeland en Nederland per 1000 12- tot 18-jarigen. (Bron: Mandemakers, p. 105)

Noot

Dit artikel is een uitgebreide bewerking van een voordracht op 12 mei 2007 voor de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO). Deels summiere verwijzingen zijn toegevoegd, veelal zonder pagina-aanduiding. In citaten is de spelling gemoderniseerd. Het artikel zal verschijnen in drie gedeelten. De volgende twee afleveringen zullen verschijnen in komende nummers van *Euclides*.

Verwijzingen

[1] Voor de discussies over de infinitesimaalrekening: Harm Jan Smid, *Dien onvergelijkelijken stap vooruit*, in: Fred Goffree, Martinus van Hoorn, Bert Zwaneveld (red.), *Honderd jaar wiskundeonderwijs, Een jubileumboek* (Leusden, 2000).

[2] Kees Mandemakers, *HBS en gymnasium. Ontwikkeling, structuur, sociale achtergronden en schoolprestaties, Nederland ca. 1800-1968* (Amsterdam, 1996).

[3] Harm Jan Smid, *Een onbekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863* (Delft, 1997).

[4] O. Bottema, *Met dank voor de lessen. Rede ter gelegenheid van het eeuwfeest der Rijks Hogere Burgerschool te Groningen* (Groningen, 1964).

[5] Bastiaan Willink, *De tweede Gouden Eeuw, Nederland en de Nobelprijzen voor natuurwetenschappen 1870-1940* (Amsterdam, 1998).

[6] Auke van der Woud, *Een nieuwe wereld. Het ontstaan van het moderne Nederland* (Amsterdam, 2006); p. 332.

[7] Ed de Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde, Een histo-*

risch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw* (Utrecht, 1999).
[8] *Vijftig jaar illegaal. Gedenkboek van het Nederlandsch Lyceum 1909-1959* (Groningen, 1959).
[9] Officieel werd alleen de werking verminderd.
[10] K. van Berkel, *Dijksterhuis. Een biografie* (Amsterdam, 1996). H.A. Klomp, *De relativiteitstheorie in Nederland* (Utrecht, 1997) geeft een andere opvatting.
[11] Klomp voornoemd.
[12] *Honderd jaar A.V.M.O. Gedenkboek 1867-1967* (z.p. 1967); p. 12. De hogere kosten waren hotelkosten.
[13] In 1899 waren er in Nederland bijna 95.000 fietsen, in 1924 1,8 miljoen, d.w.z. bijna 20 keer zoveel. De verbetering van de vervoersmiddelen was tevens bevorderlijk voor de opkomst van politieke partijen. J.W Schot, H.W. Lintsen, A. Rip, A.A. Albert de la Bruhèze (red.), *Techniek in Nederland in de twintigste eeuw, deel V Transport en communicatie* (Zutphen, 2002).
[14] Voor de akte-examens: Klaske Blom in *Honderd jaar wiskundeonderwijs*.
[15] F. Henneman, W.A. van der Spek, *Levensbeschrijving van Pieter Wijdenes*, in: *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 59 (maart 1971); pp. 215-216.
[16] Dirk van Dalen, Volker R. Remmert, *Ce périodique foncièrement international, The birth and youth of Compositio Mathematica*, in: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 nr. 3 (september 2007); pp. 178-189.
[17] Interview met Joh.H. Wansink in Fred Goffree, *Ik was wiskundeleraar* (Enschede, 1985).
[18] Voornoemd interview met Wansink.
[19] Aantallen op basis van een ruwe schatting uit het *Jaarboekje* van 1924.
[20] *Honderd jaar A.V.M.O. Gedenkboek 1867-1967* (z.p. 1967); p. 44.
[21] De Moor, *Van vormleer naar realistische meetkunde* voornoemd, en Klomp voornoemd.

Over de auteur
Martinus van Hoorn was hoofdredacteur van *Euclides* gedurende de periode 1987-1996.
E-mailadres: *mc.vanhoorn@wxs.nl*

Wiskunde programma's veranderen

VAN TWEEDE FASE VIA VERNIEUWDE TWEEDE FASE NAAR VERNIEUWING WISKUNDE 2013

[Jenneke Krüger]

Bent u op de hoogte?
Maart 2008. Een leerling in havo, profiel N&T. Onderwerp: goniometrische berekeningen in een driehoek. Moet een leerling in 5-havo dat beheersen voor zijn CE? Een leerling die nu in 4-havo zit? En hoe zit het straks in 2013, met de leerlingen die dan naar 4-havo gaan, moeten ze dat voor hun CE weten? (Antwoorden, a1, aan het eind van het artikel.) Nog een quizvraag, dit keer over leerlingen in profiel N&G van vwo, maart 2008. De leerling volgt in alle gevallen de bij het profiel behorende wiskunde. Moet een leerling in 5-vwo op het CE grafieken kunnen tekenen van goniometrische functies (sin x en cos x) en de daarbij relevante begrippen hanteren? En moet die leerling in 4-vwo dat straks op het CE kunnen? Hoe zit dat met de leerlingen die in 2013 in het vierde leerjaar starten? (Antwoorden, a2, aan het eind van het artikel.) Misschien een idee om de sectievergaderingen te verlevendigen? Elke docent brengt twee quizvragen in over de programma's van 1998, 2007 en 2013. Weet u wat een leerling in 4-havo A, profiel N&G, aan algebraïsche vaardigheden, zonder gebruik van GR, moet beheersen voor zijn CE? Wat vraagt u van die leerling op het SE?

Inleiding

Dit is het begin van een korte serie artikelen over de wijzigingen in de wiskundeprogramma's met als uitgangspunt 1998, de start van de Tweede Fase. In het vierde leerjaar zijn docenten nu bezig met de bijgestelde programma's van 2007 te onderwijzen, in 2011 moeten adviezen over de geheel nieuwe programma's door cTWO aan de minister aangeboden worden.
Omdat die programma's niet voor 2013 effectief worden, gebruiken we in deze serie 2013 als jaartal. U kunt dus nog meepraten over deze nieuwste voorstellen, tot 2011.
Omdat veel veranderingen voor wiskunde gelegen zijn in de algemene veranderingen voor de hele bovenbouw havo/vwo volgt hier eerst een zeer globaal overzicht van wijzigingen vanaf 1998.
In volgende artikelen (te publiceren in komende nummers van *Euclides*; red.) komen achtereenvolgens wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C en wiskunde D aan de orde.
Allereerst een terugblik over de afgelopen 10 jaar, vanaf de start van de Tweede Fase.

Veranderingen in de bovenbouw havo/vwo 1998 – 2011

Start van de Tweede Fase, vanaf 1998

- Eén doelstelling van die organisatorische en inhoudelijke vernieuwing was een betere aansluiting op het hoger onderwijs, door middel van verbetering van algemene vaardigheden (zoals communicatieve, presentatie en planningsvaardigheden) en door middel van een inhoudelijk zwaarder programma.
- In overeenstemming met de invoering van vier profielen kwamen er vier wiskundeprogramma's, voor zowel havo als vwo: wiskunde A1; A12; B1; B12 (in plaats van wiskunde A en B).
- Het examenprogramma werd voor alle vakken gedetailleerd vastgelegd. Als voorbeeld: voor wiskunde A12 in havo 90 inhoudelijke eindtermen, in vwo 150 inhoudelijke eindtermen.
- Niet-vakspecifieke vaardigheden werden in de examenprogramma's van alle vakken opgenomen (domein A).
- Voor wiskunde toetsing in het CE van 100% van de vakinhoud (in principe).

- Er kwamen veel voorschriften voor het schoolexamen, voor alle vakken.
- Praktische opdrachten werden verplicht, ook voor wiskunde.
- De grafische rekenmachine werd bij wiskunde niet verplicht, maar bij het centraal examen wordt er van uit gegaan dat de kandidaten een grafische rekenmachine tot hun beschikking hebben.

Bijna vanaf het begin van de invoering waren er bezwaren, van leerlingen, later ook van docenten, schoolmanagers en van het hoger onderwijs.
In 2003 begon het officiële traject voor een structurele aanpassing: wijziging van de organisatie, deelvakken zouden verdwijnen en tegelijkertijd zou voor een aantal vakken een kleine bijstelling van het examenprogramma plaats vinden. Deze 'kleine bijstellingen' stonden los van de stroom van aanpassingen die sinds 1998 de scholen binnenkwam: onderwerpen kwamen en gingen uit het centraal dan wel schoolexamen. Voor wiskunde startte de kleine bijstelling in 2005 met een werkconferentie waarvoor van alle betrokken groepen één of twee vertegenwoordigers uitgenodigd waren. Men kwam daar tot afspraken over wijzigingen, met name over de noodzakelijke besnoeiingen in wiskunde B, waarvan het aantal uren fors teruggebracht werd. Overigens gold die forse besnoeiing ook voor natuurkunde in het profiel N&T.

Vernieuwde Tweede Fase, vanaf 2007

- Doelstellingen waren onder meer: beter organiseerbaar, meer keuzemogelijkheden voor scholen en leerlingen, minder overladenheid en versnippering.
- Havo krijgt wiskunde A en B en als profielkeuzevak wiskunde D (profiel N&T), op advies van de profielcommissies.
- Vwo krijgt wiskunde A, B en C en als profielkeuzevak wiskunde D (profiel N&T), op advies van de profielcommissies.
- Wiskunde A in havo en vwo is bestemd voor zowel profiel E&M als profiel N&G. Scholen mogen, als ze daarvoor kiezen, bepaalde groepen leerlingen de mogelijkheid van wiskunde B aanbieden.
- Leerlingen mogen niet twee wiskundevakken combineren, met uitzondering van wiskunde D, dat kan gekozen worden door leerlingen die wiskunde B volgen.
- Het examenprogramma wordt vastgelegd in zeer globaal geformuleerde eindtermen. Als voorbeeld: wiskunde A havo 16 inhoudelijke eindtermen, wiskunde A vwo 14 inhoudelijke eindtermen. Een examenprogramma wordt voor meerdere jaren vastgesteld, in dit geval tot minstens 2013.
- De toetsing in het centraal examen wordt aanvankelijk voor alle exacte vakken beperkt tot 60% van de vakinhoud; dat deel wordt gespecificeerd in een syllabus onder verantwoordelijkheid van CEVO. (Een syllabus beschrijft voor de eindtermen van het examenprogramma die centraal geëxamineerd worden in detail welke kennis, kunde en vaardigheden er van leerlingen verwacht wordt op het CE.) De specificaties in de syllabus kunnen jaarlijks door CEVO gewijzigd worden. Zie ook ***figuur 1***.
- In het schoolexamen moet verplicht minimaal de resterende 40% getoetst worden, meer mag. Toetsing op basis van globale eindtermen. Adviezen voor het schoolexamen zijn door SLO uitgebracht in de vorm van een handreiking.
- Bijna alle voorschriften voor het schoolexamen verdwijnen.
- Onder druk van verschillende lobbygroepen kwamen er voor wiskunde – toch al later begonnen met het opstellen van examenprogramma's, syllabi en handreikingen – frequent wijzigingen vanuit het ministerie. De laatste wijzigingen betroffen de verdeling van de inhoud over CE en SE. Nadat eerst al voor wiskunde B vwo bepaald werd dat 100% in het CE getoetst moet worden (dus eigenlijk inclusief keuzeonderwerp), werd iets dergelijks afgesproken voor havo wiskunde B en vervolgens ook voor vwo wiskunde A. Wiskunde blijft een bijzonder vak.

Tegelijkertijd werd de volgende grote vernieuwing voorbereid. Eind 2005 werd een vernieuwingscommissie voor wiskunde geïnstalleerd (cTWO), in navolging van vernieuwingscommissies voor andere bètavakken. In 2011 moet er een inhoudelijk geheel nieuw programma voor wiskunde zijn. De kaders van 2007 blijven (wiskunde A, B, C en D, de omvang in slu, 60% in schoolexamen, etc.). Daarover in de volgende paragraaf meer.

Nieuwe programma's voor 2013

Stand van zaken anno begin maart 2008; zie ook ***figuur 2*** (op pagina 293).
- De vernieuwingscommissie wiskunde, cTWO, heeft examenprogramma's geformuleerd voor alle zeven wiskundevakken, op basis van het door haar gepubliceerde visiedocument (*Rijk aan betekenis*, maart 2007). Dit zijn dus globale programma's, met de zelfde structuur als die van 2007. Dat wil zeggen dat elk subdomein beschreven is in één globale eindterm en niet gedetailleerd is vastgelegd en dat wordt aangegeven hoe de verdeling van de inhoudelijke domeinen over CE en SE is.
- De vernieuwingscommissie wiskunde heeft, als we vergelijken met andere vernieuwingscommissies, veel groepen geraadpleegd tijdens het tot stand komen van de programma's. De belangstelling van docenten was tot nog toe niet groot.
- De examenprogramma's liggen nu (maart 2008) bij de staatssecretaris, die moet aangeven of met deze programma's verder gewerkt wordt. Inmiddels hebben zowel de resonansgroep [1] als de NVvW op de programma's gereageerd, waarbij de

PEP-commissies (5)	Opstellen van vijf examenprogramma's. A12 → A (havo en vwo) B12 → B (havo en vwo) A1 → C (vwo) Examenprogramma's worden voor meerdere jaren vastgelegd.
CEVO	Verantwoordelijk voor syllabi. Elke syllabus wordt geformuleerd door een syllabuscommissie, voor elk programma één. De syllabus legt per jaar vast wat in het centraal examen gevraagd kan worden.
Cito	Lid van PEP-commissies en van syllabuscommissies.
SLO	Secretaris van PEP-commissies. Secretaris van syllabuscommissies. Productie van handreikingen (A, B, C en D). Adviserend voor het schoolexamen.

figuur 1
De rol van de PEP-commissies [2], CEVO, Cito en SLO bij de wiskundeprogramma's van 2007

aanbevelingen van beide groepen in een aantal gevallen nogal verschillen. Er is nog niet bekend wanneer de staatssecretaris een beslissing neemt naar aanleiding van de adviezen.

- Omdat in september een aantal scholen de nieuwe programma's gaan uitproberen, zijn - vooruitlopend op de beslissing van de staatssecretaris - drie syllabuscommissies aan het werk gegaan om een werkversie van de betreffende syllabus op te stellen. Onder andere naar aanleiding van het werk van de syllabuscommissies kunnen de formuleringen in de examenprogramma's nog wat bijgesteld worden. Dat kan pas gebeuren nadat de syllabuscommissies hun werk gedaan hebben. Uiteraard is het streven om voor de zomervakantie van 2008 duidelijkheid te geven over het examenprogramma en de syllabus, voor de periode 2008-2011 wel te verstaan. Een reden voor een wijziging kan zijn dat de oorspronkelijke eindterm slecht toetsbaar is. Handreikingen worden tijdens de zomermaanden geschreven.
- In september 2008 gaat een beperkt aantal scholen de experimentele programma's aanbieden aan hun leerlingen; dat zijn de pilotscholen. Op basis van de ervaringen in de pilotscholen kan de syllabus van een programma nog wat bijgesteld worden, bijvoorbeeld als uitvoering niet haalbaar blijkt. Uitgangspunt is dat leerlingen niet de dupe mogen worden van onvolkomenheden in een experimenteel programma.
- In 2011 biedt cTWO tenslotte haar adviezen over de examenprogramma's aan de minister aan. Daarna volgt een periode van communicatie, boeken schrijven, etc., zodat invoering niet voor 2013 verwacht wordt.

In enkele artikelen zal worden ingegaan op de veranderingen per wiskundeprogramma. Een deel van die veranderingen vloeit dus voort uit de wijzigingen voor de Tweede Fase in 2007 als geheel. Maar daar zijn toch weer uitzonderingen gemaakt voor wiskunde, met name in de studielast voor wiskunde B en de toekenning van onderwerpen aan het CE.

Antwoorden

(a1) Ja / Nee / Onbekend in maart 2008.
(a2) Ja (wiskunde B1) / Waarschijnlijk niet (wiskunde A): weliswaar hoort eindterm 6 tot het CE (inclusief goniometrische functies, maar in de conceptsyllabus stelt CEVO dat over goniometrische functies geen vragen op het CE worden gesteld (maar de syllabus kan ieder jaar worden aangepast), wordt dus alleen in SE getoetst / Onbekend in maart 2008.

Noten

[1] De resonansgroep is door de staatssecretaris ingesteld met als opdracht het adviseren over de doorstroomrelevantie van de programma's wiskunde.

[2] PEP staat voor Project Examen Programma, ingesteld door OCW met als opdracht een voorstel te formuleren voor inhoud en globale eindtermen van de examenprogramma's 2007.

cTWO	Vernieuwing van wiskundeonderwijs in havo en vwo. Opstellen van zeven examenprogramma's. Daarbij hebben drie programmacommissies een inbreng gehad (vwo B/D, havo B/D, havo en vwo A en vwo C).
Resonansgroep	Adviesgroep ingesteld door OCW. Opdracht: adviseren over doorstroomrelevantie van de examenprogramma's.
CEVO	Verantwoordelijk voor syllabi. Elke syllabus wordt geformuleerd door een syllabuscommissie. Syllabuscommissies: wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C.
Cito	Lid van syllabus commissies.
SLO	Secretaris van programmacommissies. Secretaris van syllabuscommissies. Productie van handreikingen (A, B, C en D).

figuur 2 De rol van cTWO, CEVO, Cito en SLO en de resonansgroep bij de programma's van 2013

Over de auteur
Jenneke Krüger was o.a. docent wiskunde. Vanaf 2003 werkt ze als leerplanontwikkelaar voor SLO, aandachtsgebied exacte vakken Tweede Fase. Ze was o.a. secretaris van de vijf PEP-commissies en de vijf syllabuscommissies voor 2007 en schreef mee aan de handreikingen 2007. Ze was secretaris van de programmacommissie van cTWO vwo B/D. Ze is secretaris van de syllabuscommissie wiskunde B.
E-mailadres: *j.kruger@slo.nl*

Walibi!

WISKUNDE SCHOLEN PRIJS 2007, AFLEVERING 2

[Dédé de Haan en Adri Knop]

In week 25 van 2007 was het zover: in die week werden de prijzen van de Wiskunde Scholen Prijs 2007 uitgereikt. Op woensdag 20 juni in Amstelveen en Hoorn, op vrijdag 22 juni in Rotterdam.
In drie afleveringen maakt u kennis met de projecten van deze drie prijswinnende scholen.
In de Euclides-special 'Statistiek en Kansrekening' van februari 2008 werd het project Vergrijzing van de Gereformeerde Scholengemeenschap Randstad gepresenteerd. Deze aflevering gaat over het project Walibi! van de Scholengemeenschap Tabor, locatie Oscar Romero, in Hoorn.

Vakoverstijgend project

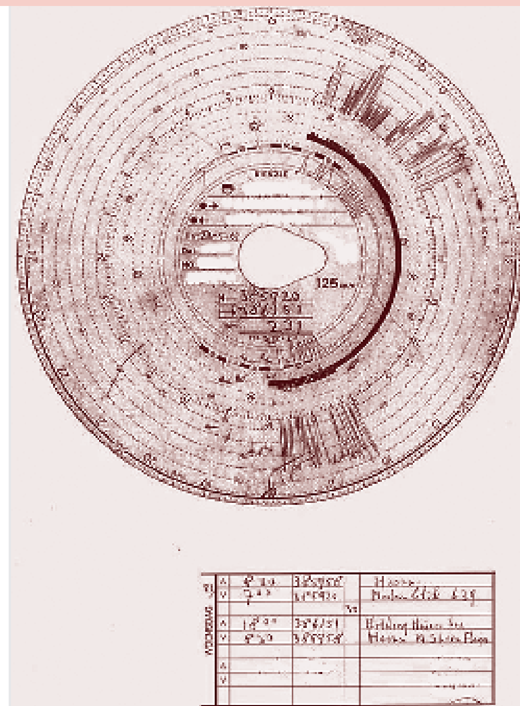
De SG Tabor profileert zich sinds 2006 als scenario 3 school, en gaat daarom steeds meer vakoverstijgende projecten aanbieden in de stromen exact, talen, sport, cultuur en maatschappij.
Een schoolreisje naar Walibi (Biddinghuizen, Flevoland) stond jaarlijks altijd al op het programma. Voor het eerst heeft de school dit nu gecombineerd met buitenschools leren.
Adri Knop, docent wiskunde, schreef een vakoverstijgend project voor de exacte stroom. De vakken natuurkunde, biologie, verzorging, techniek, aardrijkskunde, economie en natuurlijk wiskunde komen hierin terug.
Rondom het thema Walibi en pretparken zijn een aantal lesbrieven ontwikkeld.
Dit zijn:

- *Walibi & De busreis* (buskosten, tachograaf, brandstof);
- *Walibi & Sky-Diver* (slingerproef, formule vinden, VU-Grafiek);
- *Walibi & Mc Smack* (consumptie, gezondheid, energie);
- *Walibi & Plattegrond* (schaal, afstanden, GoogleEarth);
- *Walibi & El Rio Grande* (krachten, brug ontwerpen en bouwen, West Point Bridge Designer, schaalmodel);
- *Walibi & Grande Roue* (reuzenrad, hoogtemeter, verhoudingen, cirkel);
- *Walibi & Statistiek* (enquête, diagrammen, VU-Statistiek).

Het project is ontwikkeld voor klas 2 vmbo, maar is ook bruikbaar in andere tweede klassen. Iedere lesbrief bevat ICT-vaardigheden zoals het gebruik van softwareprogramma's (bijvoorbeeld VU-Grafiek en VU-Stat), maar ook allerlei gratis te downloaden software van internet, zoals het bruggenbouw-programma *West Point Bridge Designer* [1]. Ook worden veel andere internetsites nuttig gebruikt.
In zes projectmiddagen werken de leerlingen in tweetallen in een roulatieschema iedere week een andere lesbrief uit.
Het bezoek aan Walibi vindt plaats aan het eind van het schooljaar.
In de diverse deelprojecten wordt een beroep gedaan op verschillende wiskundige vaardigheden in alle vakken: ontwerpen en zelf bouwen (El Rio Grande en Grande Roue), experimenteren (sky-diver, reuzenrad), opzoeken (Mc Smack, Plattegrond) en verwerken van gegevens (statistiek en bus).

De Wiskunde Scholen Prijs
De prijs wordt jaarlijks uitgereikt sinds 2002. Het is een stimuleringsprijs, bedoeld om scholen uit te nodigen met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden, en op die manier goede initiatieven zichtbaar te maken en het imago van wiskunde te verbeteren.
Scholen kunnen strijden in drie categorieën: vmbo, onderbouw havo/vwo en bovenbouw havo/vwo.
Ieder project dat ingezonden wordt (en dat kan van alles zijn, van vakoverstijgend tot verdiepend) wordt beoordeeld door een deskundige jury. In iedere categorie valt € 1000,00 te winnen.
De Wiskunde Scholen Prijs is voortgekomen uit het WisKids-project. Dit was een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs.





figuur 1

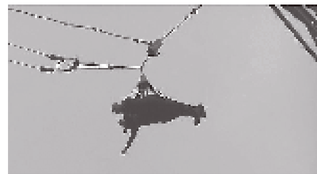
Originele aspecten

Zelden is er zo'n breed vakoverstijgend project ontwikkeld waar zoveel vakken in terugkomen: wiskunde, natuurkunde, scheikunde, techniek, biologie, verzorging en aardrijkskunde werken samen. In dat opzicht is het materiaal uniek. De kracht zit hem in het feit dat de leerling iedere projectmiddag een ander aspect van het thema pretpark uitvoert. De reis erheen, het meetwerk in het park, de diverse attracties, het uitvoeren van een practicum, het maken van een proefopstelling, het uitvoeren en

Walibi & Sky diver



&



&



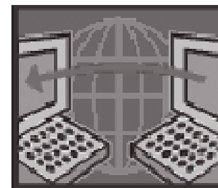
Inleiding

Aan het eind van dit schooljaar willen we graag met z'n allen een dagje naar Walibi Nederland. Uiteraard zullen er daar weer een hoop attracties bezocht worden.

En … hoe hoog ga je dan?
En … hoe snel ga je dan?
En … kloppen die getallen allemaal wel?
En … kan ik dat controleren?

Allemaal vragen waarbij je zelf op zoek gaat naar de antwoorden! Veel succes daarbij.

Voorbereiding



Je gaat straks in het lokaal een proefopstelling maken en metingen verrichten. Met die meetgegevens ga je aan de slag in VU-grafiek. Op internet ga je op zoek naar filmpjes die je kunnen helpen de antwoorden te vinden op alle vragen. Je moet dus wel de beschikking hebben over een computer met internetaansluiting.

Het onderzoek.

Je onderzoekt in deze opdracht o.a.

- de slingertijd van een verticale slinger
- de formule van de slingertijd
- de slingertijd van Sky Diver
- de slingerlengte van de Sky Diver

Taakverdeling.

Je werkt in tweetallen samen aan de meet opstelling. De één meet de tijden op, de ander laat de slinger los. De één noteert alle antwoorden op de werkbladen, de ander 'bedient' de muis en de computer. Wissel regelmatig van taak.

De werkelijkheid

Op internet staat een filmpje over deze attractie, als je je nog niet precies kunt voorstellen hoe één en ander gaat, ga dan naar deze site:

Ga naar: http://www.youtube.com/watch?v=7ys67kxCYcM

Het eindproduct.

Deze lesbrief is de derde van een serie die horen bij het project Walibi. Bewaar ze allemaal in je map. Het resultaat van deze telt mee in de eindbeoordeling van alle opdrachten

figuur 2

verwerken van een enquête, het ontwerpen en uittesten van een schaalmodel: iedere leerstijl komt aan bod.
Een aantal deelprojecten zullen we in dit artikel belichten.

Walibi & De busreis

Om berekeningen te laten doen aan de busreis naar Walibi had docent Adri Knop bij een touringcarmaatschappij de tachogrammen opgevraagd voor de rit van Hoorn naar Walibi. Er gaan tenslotte vast wel meer reisjes vanuit Hoorn naar Walibi door andere scholen of gezelschappen, en het ging natuurlijk om de gegevens op het tachogram, zodat leerlingen daaruit data zouden kunnen aflezen.
Men was de heer Knop prima ter wille: hij kreeg vrij gemakkelijk *alle* tachogrammen van de maanden mei en juni van zes jaar geleden (toen Walibi nog 'Six Flags' heette), maar dan moest hij zelf maar bekijken of daar een bruikbare tussen zat. Na stevig uitzoekwerk bleek dat zo te zijn, waarmee er natuurlijk een prachtige, bruikbare, betekenisvolle context gevonden was waarmee de leerlingen aan de slag konden. Een foto van het tachogram is te vinden in ***figuur 1***. Hierop is af te lezen hoe lang de rit duurt, wanneer er gestopt werd en wat de snelheden waren. Tevens werd bij deze opdracht een routeplanner-site gebruikt, om de afstand tussen Hoorn en Walibi te vinden.

Walibi & Sky-diver

In ***figuur 2*** staat de eerste bladzijde van het deelproject over de Sky-diver afgebeeld. Voordat er naar Walibi gegaan wordt, hebben de leerlingen op school, in een practicum, metingen aan slingers en slingertijd gedaan. Ze hebben met behulp van VU-Grafiek ook een bijbehorende formule gevonden.
Mooi detail van dit deelproject is het gebruik van filmpjes op YouTube: eentje die je laat zien wat de SkyDiver is, en twee links naar filmpjes van de SkyDiver, op grond waarvan leerlingen de gemiddelde slingertijd van de SkyDiver kunnen uitrekenen.
Het deelproject heeft een prachtige 'conclusie'. De leerlingen zien de foto zoals afgebeeld in ***figuur 3***. De tekst van het bord dat uitleg geeft bij de Sky Diver luidt als volgt:



figuur 3

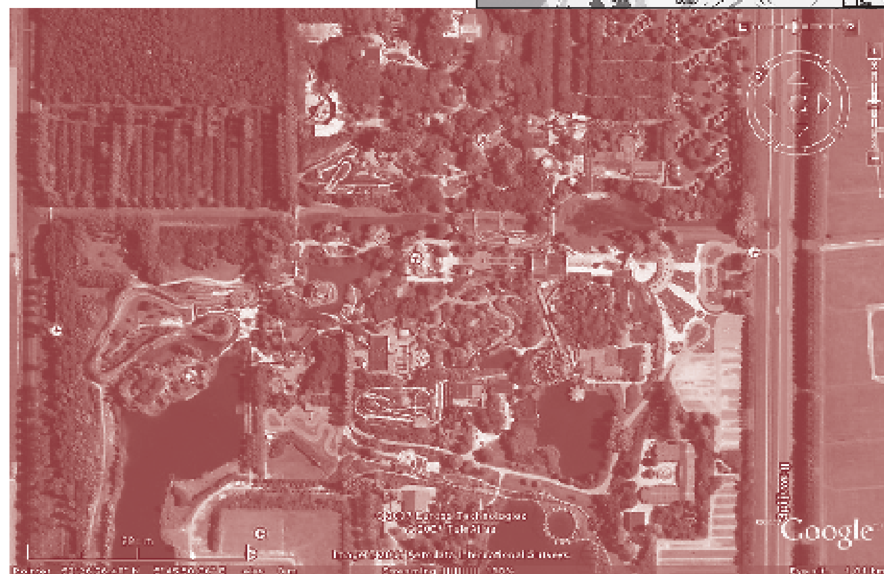


figuur 4

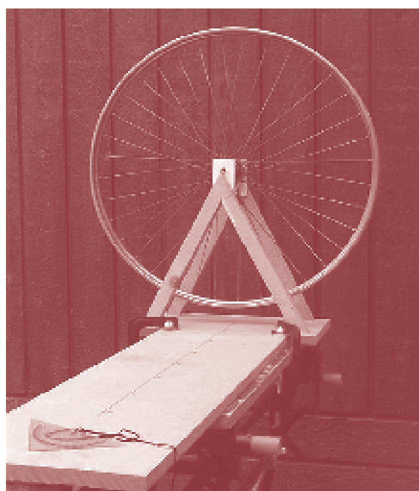
Wist je dat je in deze attractie een hoogte bereikt van 54 meter en dat je een snelheid kunt bereiken van wel 100 km per uur?
De leerlingen moeten vervolgens reageren op de vraag:
'Als je dit bord leest, ben je het dan eens met de hoogte die je bereikt? Waarom wel of waarom niet?'



figuur 5



figuur 6



figuur 7

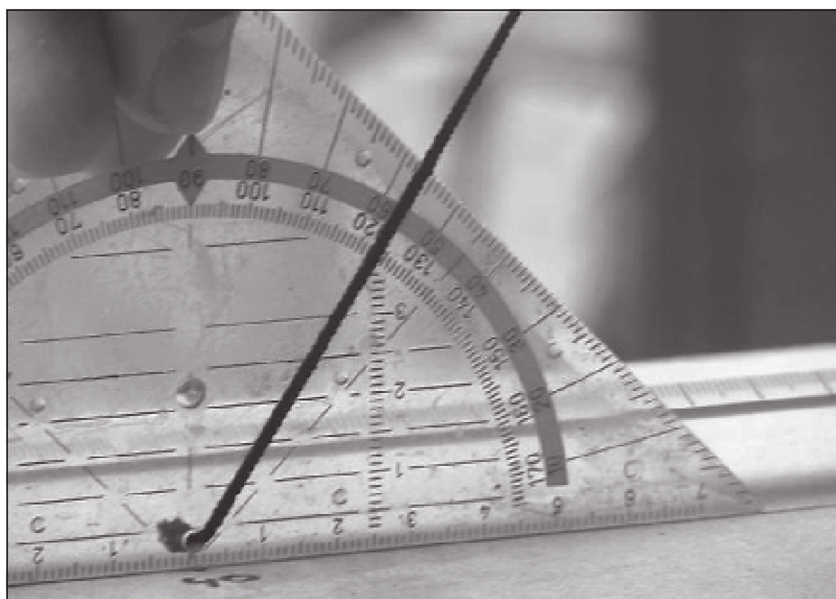


figuur 8

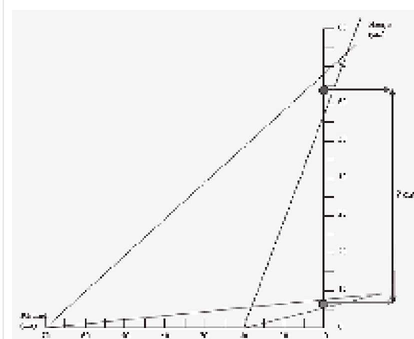
Walibi & Plattegrond
De leerlingen kregen drie plattegronden van Walibi: één in vogelvlucht (***figuur 4***), één topografische kaart (***figuur 5***) en één luchtfoto (***figuur 6***). Met de topografische kaart van Flevoland (van ver voor de tijd van Walibi) gaan de leerlingen schaalrekenen; met behulp van de luchtfoto en Google Earth gaan de leerlingen werkelijke afstanden tussen attracties meten en een afstandentabel maken. (Weer) erg mooi gebruik van ICT!

Walibi & Grande Roue
Ook dit deelproject heeft een voorbereiding in de vorm van een practicum. Het reuzenrad wordt, op school, voorgesteld door een fietswiel (zie ***figuur 7***). Hieraan worden met een geodriehoek metingen gedaan (zie de ***figuren 8 en 9***), en het resultaat wordt op schaal getekend (***figuur 10***). Vervolgens wordt in het echt, in het park, met hoekmeters hetzelfde proces doorlopen (***figuur 11***), en berekenen leerlingen op deze manier de hoogte van het reuzenrad (***figuur 12***).

Walibi & El Rio Grande
De attractie ‘El Rio Grande’ is een wild-water-rivier, waarover je in een bakje een tocht maakt. In dit geval heeft docent Adri Knop de attractie als aanleiding gebruikt om een brug te ontwerpen.



figuur 9



figuur 10

Met behulp van het software-programma *West Point Bridge Designer* [1] werden de leerlingen uitgedaagd een ontwerp op schaal te maken van een zeer stevige brug, met zo min mogelijk materiaal. Een foto van een ontwerp is te zien in ***figuur 13***.
Dit onderdeel was bij de leerlingen het meest populair!

Het juryoordeel
In dit artikel is maar een klein deel van het materiaal besproken. Het oordeel van de jury was op het totaal gebaseerd. De tekst op het juryrapport luidde als volgt:
‘De lesbrieven zien er verzorgd uit. Het is gevarieerd en origineel, zoals bijvoorbeeld het meten van de hartslag voordat je in de achtbaan gaat en direct erna. Eén van de juryleden verzuchtte: “Wat kun je toch veel doen met één onderwerp!” Een ander jurylid zou zo mee willen doen aan het project.
De jury is van mening dat de context echt wordt gebruikt en dat het nuttig gebruik van het internet behelst. De jury vraagt zich wel af of alle opdrachten even interessant zijn. De jury concludeert dat het project passend is bij het niveau en dat de meeste vragen relevant zijn. Het project is authentiek! Wat een weelde, wat een toewijding, wat een creativiteit. Zonder twijfel de beste inzending.’

Overdraagbaarheid
Al het materiaal is bruikbaar op iedere school en is methode-onafhankelijk. Het mooie is dat je er zelfs niet daadwerkelijk voor naar Walibi hoeft te gaan! Er staan in het materiaal diverse links naar filmpjes. Ook die filmpjes kun je gebruiken om de metingen te kunnen verrichten.
Toch werkte het vanzelfsprekend wel stimulerend dat er aan het eind van het schooljaar

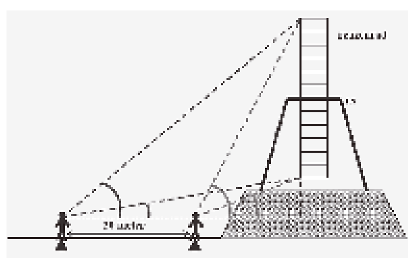
een ‘studiereis’ gemaakt werd naar Walibi. Zo werden de meetresultaten in de praktijk onderzocht en gingen educatie en vermaak hand in hand.

Napraten met de docent

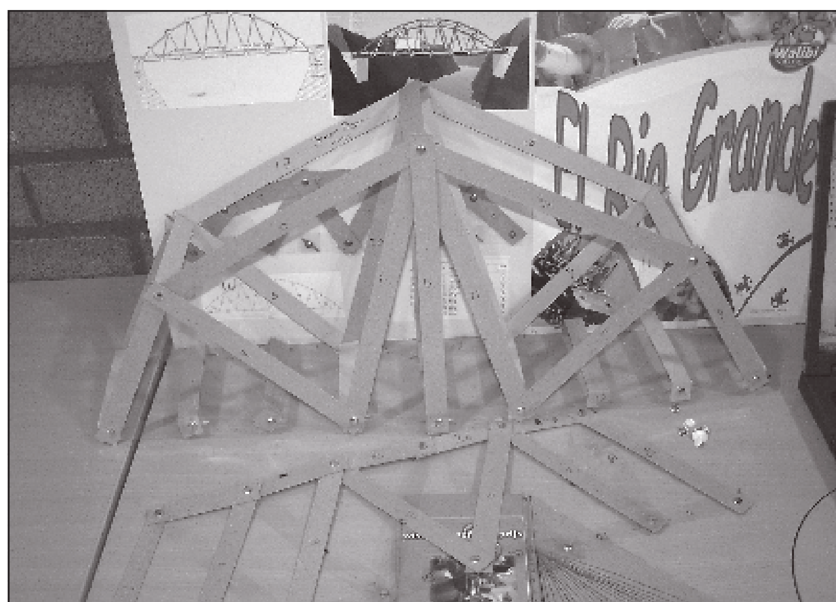
Adri Knop hoopt en verwacht dat met zo’n project de belangstelling voor wiskunde en de overige bètavakken zal toenemen. Het thema ‘pretparken’ staat absoluut dicht bij de belevingswereld van de leerling, en de wiskunde wordt functioneel toegepast.
In de zes weken die de leerlingen de tijd kregen, lukte het maar nauwelijks om vier deelopdrachten af te ronden. Met alleen de brug (‘Walibi & El Rio Grande’) kun je al bijna 3 lessen vullen. Het ontwerpen van de brug kost 1 blokuur; voor het maken van het schaalmodel mag je wel 2 blokuren uittrekken. Op grond van deze ervaringen, en op grond van de belangstelling van de leerlingen voor de verschillende deelprojecten, zal Knop de lessenserie blijven aanpassen. Daarnaast zal hij zich ook continu bezig blijven houden met nieuwe projecten, net als zijn collega Anja Moeijes, die met het project *Wiskunde in de krant* (volgens de jury: ‘een must voor iedere school’) wel meedeed aan de Wiskunde Scholen Prijs 2007, maar deze keer niet won. Knop en Moeijes hebben samen in 2003 ook al de Wiskunde Scholen Prijs gewonnen met het project *Nederland = Aardappelland* [2]. Op verschillende conferenties (Reehorst, NWD) hebben ze dit project gedemonstreerd - en ook tijdens de laatste studiedag van de NVvW in Nieuwegein op 10 november jl. toonde Adri Knop zich een ware ambassadeur van mooie projecten.



figuur 11



figuur 12



figuur 13

Informatie

Wie meer over dit project wil weten kan contact opnemen met Adri Knop (*A.Knop@tabor.nl*).
Ook kunt u werkbladen van geselecteerde projecten terugvinden via de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*).
Meer informatie over de Wiskunde Scholen Prijs is te vinden op de website van de WSP (*www.wiskundescholenprijs.nl*).

Noten

[1] Zie: *http://bridgecontest.usma.edu/download.htm*

[2] Zie het gelijknamige artikel van Heleen Verhage in *Euclides* 79(5), februari 2004.

Over de auteurs

Dédé de Haan (*d.dehaan@fi.uu.nl*) is werkzaam bij het Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (Universiteit Utrecht); zij is organisator van de Wiskunde Scholen Prijs.
Adri Knop (*A.Knop@tabor.nl*) is wiskundedocent aan de Scholengemeenschap Tabor, locatie Oscar Romero te Hoorn. Daarnaast is hij lid van de programmacommissie van de Nationale Wiskunde Dagen.

Ik las en dacht…

[Klaske Blom]

In oude jaargangen van vaktijdschriften over ons wiskundeonderwijs vinden we regelmatig artikelen die in het licht van huidige onderwijsontwikkelingen opeens opmerkelijk worden. Soms omdat ze, geschreven in een totaal andere tijd, een verfrissend perspectief op onze huidige situatie bieden, soms omdat ze, ondanks hun gedateerdheid, verrassend actueel blijken te zijn, omdat ze tot nadenken stemmen, omdat…
In de rubriek 'Ik las en dacht…' neemt Klaske Blom u mee naar zo'n 'oud actueel artikel'.



Bron: www.wiskundemeisjes.nl

De legende van de wiskundige begaafdheid

En nog meer

In mijn vorige rubrieksaflevering [1], *Het Niveau, een dalende of een alternerende trend?*, citeerde ik een aantal fragmenten uit een artikel van Dr. H.J.E. Beth, *Het 'meer en meer wiskundig' karakter der H. B. School met 5-jarigen cursus*. In 1924 uitte hij in dit stuk kritiek op de gangbare opvattingen omtrent het toenemend wiskundig karakter van de HBS. In zijn ogen was er eerder sprake van een afname. Verder betoogde hij dat kinderen in het lager onderwijs geestelijk tekort kwamen en dat van de leerlingen in het voortgezet onderwijs meer gevraagd zou kunnen worden.

Wat me fascineert is dat Beth schrijft over onderwijsdilemma's die zo herkenbaar zijn, en dat toch bijna een eeuw geleden. Je zou bijna concluderen dat bezorgdheid over onderwijs tijdloos is, toch? Dat er altijd polemieken zullen zijn tussen vernieuwers en behouders lijkt me evident, maar dat de onderwerpen van strijd en bemoeienis zo herkenbaar blijven is toch verbazingwekkend?
Hieronder laat ik u nog twee fragmenten lezen uit het genoemde artikel van Beth. Ook deze twee fragmenten bevatten 'actuele' onderwerpen; deze keer spreekt er echter geen bezorgdheid maar vertrouwen uit, vertrouwen in de mogelijkheden van leerlingen in het algemeen en van meisjes in het bijzonder.

Wiskundige aanleg

Wat vindt u? Is wiskunde weggelegd voor iedereen? Kunnen we als wiskundedocenten alle leerlingen op hun eigen niveau wiskunde leren? Is wiskundeonderwijs nodig voor iedereen? Hoe erg vinden we het dat er nu een generatie leerlingen aan komt die wel het hbo instroomt, maar slechts drie jaar wiskundeonderwijs genoten heeft? Kan wiskundeonderwijs ook overbodig zijn? Hoe belangrijk zijn algebraïsche vaardigheden voor een toekomstig industrieel ontwerper?
Beth laat in zijn stuk blijken dat hij zich ergert aan de vraag naar het nut van wiskundeonderwijs en schrijft daarna iets wat wij ons nu misschien nog ter harte zouden kunnen nemen, in dit kader [2]:

'Wat men eraan heeft? Ziedaar de ergerlijke vraag, die ten aanzien van een leervak als wiskunde thans meer dan ooit gesteld wordt, en die typeerend is voor de neiging tot veronachtzaming van het ideëele, die in den tijd van en na den oorlog zulke bedenkelijke afmetingen heeft aangenomen. Men heeft alleen iets aan hetgene, dat men zoo spoedig mogelijk in klinkende munt kan omzetten. Zelfs onze jongelieden zijn aangetast; men hoort het, als men met hen bij hun vertrek over de toekomstplannen spreekt; voor velen is reeds de salarisvraag de meest belangrijke, zoo niet de eenige.
Een vrij algemeen gevoeld bezwaar tegen de wiskunde is, dat het geen vak "voor iedereen" zou zijn. Hier ben ik genaderd tot de legende van de speciale wiskundige begaafdheid. Als axioma aanvaardt men gaarne: een kind heeft mathematischen aanleg of het heeft dien niet; in het laatste geval heeft het literairen (literair-economischen?) aanleg. Hoe de legende van de speciale wiskundige begaafdheid in de wereld gekomen is, is gemakkelijk te gissen: het is een slimmigheid van den eersten slechten wiskundeleeraar. Toen hem in de leerarenvergadering gevraagd werd, waarom hij toch altijd zooveel onvoldoende cijfers had, heeft hij het zooeven genoemde axioma uitgesproken. Daar er nog steeds slechte wiskundeleeraren schijnen te zijn, en ze er ook wel zullen blijven, lijkt mij de kans uitgesloten, dat men het dwaalbegrip nog zal kunnen uitroeien. Mijn stellige overtuiging is, dat als hij zijn tijd goed besteedt en zorgvuldig overweegt, welke eischen hij op een zeker oogenblik aan zijn leerlingen mag stellen, de wiskundeleeraar volstrekt niet meer onvoldoende cijfers behoeft te geven dan zijn niet-wiskundige collega's. Komt hij regelmatig met een groot aantal onvoldoende cijfers, waar zijn collega's een milder oordeel kunnen uitspreken, dan zijn daarmede niet zijn leerlingen veroordeeld, noch zijn leervak, doch uitsluitend hijzelf.
Of dan niet de eene leerling de wiskunde met meer gemak beoefent dan de andere? Welzeker, maar dit zal met ieder vak zoo zijn. De vraag, waarom het gaat, is, of het waar is, dat er vele leerlingen zijn, die héél goed, andere zaken kunnen leeren, maar juist géén wiskunde. En deze vraag meen ik op grond mijner ervaring ontkennend te moeten beantwoorden. Ik kan me niet meer dan één leerling herinneren, die "goed" was in de andere vakken, en een der onderdeelen van de wiskunde *niet* kon leeren.'

Wiskundeonderwijs voor meisjes
'Het vorige punt brengt er mij vanzelf toe, iets te zeggen over het wiskunde-onderwijs aan meisjes. Het vraagstuk van het voortgezet onderwijs voor meisjes is zoo ingewikkeld, omdat het, meer nog dan voor de jongens, behalve een paedagogische ook een maatschappelijke zijde heeft. Let men alleen op de maatschappelijke zijde, dan zal men geneigd zijn deze vraag te stellen: Is het nu bepaald noodig, dat al onze meisjes òf die vervelende klassieke talen verdragen òf die akelige wiskunde? Maar als men alleen op de paedagogische zijde zou letten, dan zou men allicht de vraag aldus inkleeden: Hebben ook de meisjes met het oog op de moeilijkheden, die ook haar in het leven niet gespaard zullen blijven, recht op een onderwijs, dat niet de moeilijkheden uit den weg gaat, maar ze bij voorkeur opzoekt, omdat ze kunnen dienen om het verstand te scherpen, en de wilskracht te vergrooten? Men tracht wel door statistieken aan te toonen, dat meisjes "van nature" een geringe neiging tot de wiskunde vertoonen. Nu zijn cijfers en statistieken heel gevaarlijke dingen en men is verrast, als men ziet, wat er op onderwijsgebied mee bereikt wordt […] Ik heb de minderwaardigheid der meisjes op het gebied der wiskunde-studie niet kunnen constateeren; wat een groot deel harer wel erg in den weg staat, is een gemis aan zelfvertrouwen. Dat dit ontstaat door haar geringer resultaat geloof ik niet; ik ben eerder geneigd het geringer resultaat toe te schrijven aan het weinige zelfvertrouwen; het laatste ware wellicht door de groote verschillen in de opvoeding van jongens en meisjes volledig te verklaren.'

Wist u dat in Iran vooral vrouwen zeer hoogopgeleid zijn in technische studies? Helaas heeft dit een beroerde oorzaak: voor veel vrouwen is er geen andere mogelijkheid dan binnenshuis studeren om de tijd door te brengen, omdat buitenshuis vertoeven en werken verboden is. Dat ze dan kiezen voor exacte studies, is opvallend. Als dit een kwestie van opvoeding is, dan zit er in de Perzische traditie nog veel waar we wat van kunnen leren.



Deel van een affiche van de film 'Persepolis' (Sony Pictures Classics)

Noten

[1] Zie *Euclides* 83(5), pp. 257-259.
[2] De citaten zijn afkomstig uit: *Het "meer en meer wiskundig" karakter der H.B.School met 5-jarigen cursus*, door Dr. H.J.E. Beth; gepubliceerd in Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen; 1e jaargang 1924/25.

Over de auteur
Klaske Blom is redacteur van *Euclides* en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt.
E-mailadres: *kablom@tiscali.nl*

Jaarlijkse Reehorst-conferentie niet meer weg te denken

[Gert de Kleuver en Joke Verbeek]

Niet in de Reehorst maar in het APS-gebouw te Utrecht vond op 22 januari 2008 de zesde Reehorstconferentie Wiskunde plaats. Een dikke honderd wiskundedocenten uit het vmbo en de onderbouw havo-vwo wisten de weg ernaar toe te vinden. Naast een tweetal plenaire lezingen was er een keur van workshops en presentaties waaruit de deelnemers konden kiezen, zodat iedereen aan zijn of haar trekken kon komen. Een verslag.

Rekenen

Marjolein Kool, altijd goed voor een onderhoudende lezing, had als onderwerp het rekenonderwijs genomen. Een logische keus: rekenen staat volop in de belangstelling, ook bij politici en het grote publiek. Marjolein confronteerde de zaal met een stelling van professor Jan van de Craats: 'Handig rekenen moet worden afgeschaft.' Zie ook [1]. Voor deze stelling was in de zaal geen enkele medestander te vinden. Marjolein zelf leek ook al geen voorstander. Zij vroeg zich af waar die hang naar de ouderwetse staartdeling vandaan kwam. Is het pure nostalgie? Is de staartdeling een deel van het cultureel erfgoed geworden? In haar ogen was de staartdeling een algoritme om iets te berekenen en konden ook algoritmes wel gemoderniseerd worden. Dat dat al eerder gebeurd was, bewees ze door de zaal het allereerste algoritme voor delingen te laten zien: een niet erg overzichtelijk uitgebreid veld met getallen. Stel dat we daaraan waren blijven hangen!
Dat het automatiseren van bijvoorbeeld de tafels niet altijd goede rekenresultaten oplevert, werd duidelijk in een filmpje waarin te zien was hoe aan Pascal en Nadia (leerlingen uit groep 8) eenvoudige vermenigvuldigingen werden voorgelegd. Pascal kende de tafels niet goed uit zijn hoofd. Hij moest vaak lang nadenken, maar beschikte wel over allerlei strategieën waarmee hij uiteindelijk het goede antwoord produceerde. Zo kende hij 2 × 9 niet uit zijn hoofd, maar daarom draaide hij het om want 9 × 2 wist hij wel. Nadia wist de meeste antwoorden te geven omdat zij de tafels goed kende. Zodra ze het echter niet uit het hoofd wist, zoals bijvoorbeeld bij 11 × 12, dan had zij geen enkele strategie tot haar beschikking om tot een goed antwoord te komen. 'Duidelijk een nadeel', vond Marjolein. Zij hield dan ook een pleidooi voor oefenen met inzicht.
Kool is het niet eens met het pleidooi van Van de Craats om 'handig rekenen' af te schaffen [2]. Hij pleit voor afschaffing omdat er lang niet altijd een handige oplossing is. Zo wil hij 25% van 12 niet laten berekenen als 12 : 4, omdat dat niet meer werkt voor een berekening met 23%. Een leerling heeft daarom in zijn ogen meer aan een standaardwerkwijze die voor alle getallen geldt. 'Maar', zegt Marjolein Kool, '23% van iets kan schattend berekend worden, en die uitkomst is vaak goed genoeg.'
Kool en Van de Craats zijn het wél eens over het hoofdrekenen. Dat moet zijn rekenen mét het hoofd en niet uít het hoofd, vinden beiden. En ook lijken ze het eens over het feit dat zwakkere rekenaars niet geconfronteerd moeten worden met 10 verschillende manieren om iets uit te rekenen. Dat brengt ze maar in de war.
Na haar conclusie 'oefenen met begrip is de beste oplossing' vertrokken de deelnemers naar hun presentatie of workshop.

Abracadabra

Na de uitstekende lunch verzorgde Job van de Groep een presentatie. Deze oud-wiskundedocent en amateur-goochelaar uit Nieuwegein demonstreerde met zijn verdwijn- en verschijntrucs dat hij ook de niet op getallen gerichte trucs van het goochelaarsvak beheerst. Daarna stortte hij zich op de raadsels en trucs met getallen. 'Algebra lijkt niet voor niks op abracadabra', beweerde hij glashard. Vervolgens gaf hij zijn verbaasd zwijgende gehoor een demonstratie – met de verklaring van de truc als toetje. In zijn ogen kan een wiskundedocent, door leerlingen te verbazen met goocheltrucjes, hun belangstelling wekken voor de achterliggende wiskunde. 'Nooit, zoals ik, meteen de truc verklappen, hoor', bezwoer hij de toehoorders. 'Laat ze liever eerst een poosje raden naar hoe je het doet en kom een paar weken later met de oplossing.' Een aantal van zijn getallentrucs heeft hij opgetekend in een boekje [3] speciaal voor wiskundedocenten.

Workshops

De deelnemers aan de conferentie hadden verder de keus uit diverse workshops en presentaties. Elke wiskundemethode gaf acte de présence, de laatste ontwikkelingen op ICT-gebied werden uit de doeken gedaan en er was veel aandacht voor allerlei bijzondere werkvormen. Zeker geen overbodige luxe met langere lesuren en veranderende leerlingen.
Hieronder de samenvatting van enkele workshops.



Bron: www.mobilemath.nl

1. Mobiele spellen bij de wiskundeles

In de presentatie van Monica Wijers (FIsme) en Paulien Melis (Waag Society [4]) leerden we iets over een digitale ontwikkeling waar de meeste docenten nog niets van weten: de inzet van *mobile games* bij het leren van wiskunde. Het gaat dan over samen een spel maken, spelen en bekijken met technieken als GPS, internet en

mobiele telefoons. Die moderne communicatiemiddelen hebben immers de belangstelling van de gemiddelde jongere. Monica heeft als medewerkster van het FIsme samen met Paulien als deskundige van Waag Society een wiskundespel ontwikkeld dat op dit moment wordt uitgeprobeerd. In de toekomst kan een school een set aanschaffen of huren en het spel in de schoolomgeving laten spelen. Het spel oftewel de 'mobile game' is gebaseerd op commerciële spellen die wel 'environmental detectives' genoemd worden. Vlakke figuren en kaartlezen zijn de belangrijkste wiskundige elementen. Op een digitale kaart kunnen de groepjes leerlingen hun vorderingen en die van hun tegenstanders volgen, zodat het wedstrijdelement goed tot zijn recht komt. Niet alleen leerlingen beschikken over apparatuur, ook de docent heeft een aansluiting op alle telefoons met GPS, zodat hij elk moment weet waar de groepjes leerlingen uithangen en welke gebieden er door de groepjes zijn veroverd. En achteraf kunnen de leerlingen hun eigen gelopen routes terugzien op de pc en kunnen ze samen en met de docent hun verrichtingen evalueren.
Al met al een leerlingen-aansprekende afwisseling op 'normale' wiskundelessen, hoewel nog niet geheel duidelijk werd welke wiskundekennis en -vaardigheden hiermee nu precies verworven kunnen worden.

2. Wortelen
De presentatie van Peter van Wijk (APS) ging ook over de mogelijkheden van spelen in het wiskundeonderwijs. Jongeren spelen graag games, op internet, aan tafel en buiten. Daarom heeft het ministerie opdracht gegeven onderzoek te doen naar het inzetten van spellen in het onderwijs. 'Een goed spel heeft verschillende lagen', legt Peter uit. 'Het mag niet te eenvoudig zijn, anders verveelt het te snel. De sociale laag moet aanwezig zijn voor de interactie en de vormgeving moet aantrekkelijk zijn.' Vervolgens had hij een groot deel van zijn presentatie uitbesteed aan twee studentes die in het kader van hun opleiding een bordspel hebben ontwikkeld dat aan alle eisen voldoet: 'Wortelen', eigenlijk een quiz zoals *Triviant*, waarbij allerlei wiskundige vragen moeten worden beantwoord. De aanwezigen speelden het spel en beaamden dat het leuk en leerzaam was. Wellicht wordt het spel op de markt gebracht.

3. Rekenen en wiskunde op de basisschool
Willem Pilon, groepsleerkracht, verzorgde een presentatie over rekenen in groep 8. Hij heeft in een reguliere groep van 28 leerlingen drie leerlingen die op het niveau van groep 5 functioneren. Deze leerlingen krijgen een aangepast programma. De niveaus binnen Willems groep lopen uiteen van (potentieel) vmbo-BB tot en met vwo. Willem heeft de rekenles in stukken verdeeld zodat alle groepen de nodige aandacht krijgen. Even zitten tijdens een rekenles is er voor de leerkracht niet bij. Volgens Willem zijn er vier niveaus binnen het rekenonderwijs.
Niveau 1 is alleen het uitvoeren van de hoofdbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De techniek staat centraal om tot het goede resultaat te komen. Dit niveau heeft een mechanistisch karakter. Vroeger had je veel niveau 1 opgaven, dus veel opgaven in rijtjes en weinig inzicht. 89×25 werd als voorbeeld op twee manieren getoond: cijferend (onder elkaar) en via $(90 \times 20 + 90 \times 5) - 25$.
Op niveau 2 staat het analyseren en structureren van getallen centraal. Belangrijke items binnen dit niveau zijn getalbegrip, handig rekenen en schatten. Ook dit werd met voorbeelden uitgelegd.
Niveau 3 is het toepassingsrekenen. Opdrachten zijn geplaatst in een context. Analyseren van de context is belangrijk om vervolgens de juiste bewerking te kunnen toepassen. Het hoogste niveau is het probleemoplossend rekenen. De strategie staat daarin centraal.
Als laatste werd nog gewezen op de rol van de extra opgaven achterin het rekenboek waar bijvoorbeeld ook de introductie van *pi* aan de orde kwam. Hiervan liet Willem op een video zien hoe kinderen in kleine stapjes tot een relatief abstracte berekening komen van de inhoud van een cilinder.
Deze workshop had wel langer mogen duren: in korte tijd kwam er wel erg veel informatie over de deelnemers heen.

4. Geocadabra in de onderbouw
Tijdens de presentatie van Geocadabra gaf ontwerper Ton Lecluse aan hoe dit computerprogramma in de onderbouw gebruikt zou kunnen worden. Hij gaf veel aansprekende voorbeelden, zoals het raden van hoeken. Leerlingen kunnen daarbij kiezen: met of zonder kompasroos. Het werkt bijna verslavend. Natuurlijk werd ook een demonstratie van het gebruik van de stelling van Pythagoras vertoond, in het platte vlak maar ook in de ruimte. Hulplijnen zijn duidelijk zichtbaar en zullen een welkom hulpmiddel voor de leerlingen zijn.
Ton deelde proeflicenties uit zodat men enige tijd thuis met Geocadabra kon experimenteren.

5. Wiskunde en autisme
Een zeer interessante presentatie werd verzorgd door Inge Verstraete over kinderen die een stoornis hebben in het autistisch spectrum. Zij gaf eerst een korte maar begrijpelijke uitleg over ASS of te wel een Autistisch Spectrum Stoornis. Natuurlijk werden de bekende boeken van Mark Haddon en van Daniel Tammet genoemd [5]. Inge werkt bij het Steunpunt Autisme van de provincie Noord-Holland. Als je hun website [6] bekijkt vind je een enorme hoeveelheid bruikbare informatie voor docenten en zorgcoördinatoren. Andere sites vind je snel door te googlen op *steunpunt autisme*. De veertig minuten waren veel te kort en hopelijk wordt Inge volgend jaar weer uitgenodigd om dieper in te gaan op de manier waarop je met deze leerlingen om moet gaan. Een voorbeeld: hebben wij ons ooit gerealiseerd dat het automatiseren van rekenprocedures voor bijvoorbeeld ASS-kinderen heel lastig is? Zij moeten elke denkstap telkens weer opnieuw maken. Dat is heel vermoeiend; het zijn in hun hoofd allemaal losse onderdelen. We weten allemaal dat structureren lastig is voor deze leerlingen en dat zij onder meer geholpen moeten worden met het noteren van het huiswerk. Na verloop van tijd denken docenten vaak dat deze leerlingen dat zo toch onderhand wel weten. Niet dus. Zo kun je ook aan de gang met wiskunde-opdrachten. 'Waarom zou je een berekening opschrijven als je het antwoord weet? Dan ga je toch je berekening niet opschrijven?' Sommige leerlingen weten niet eens hoe zij tot een antwoord komen! Veel collega's hoopten op een vervolg volgend jaar.

Tot slot
Zoekend naar de juiste werkgroepen en of presentaties was er voor iedereen iets te vinden dat hem of haar aansprak. De plenaire presentaties zijn altijd een gok –

voor de een leuk en informatief terwijl de ander het juist saai en weinig inspirerend vond.
De programmacommissie had ook dit jaar geprobeerd een afwisselend programma te maken. Men kijkt altijd goed naar de opmerkingen op de evaluatieformulieren om zo voor een volgende keer een aansprekend en boeiend programma te kunnen aanbieden.

Noten

[1] Website van het tijdschrift *Volgens Bartjens…* (*www.volgens-bartjens.nl*, doorklikken naar 'Interactie').
[2] Zie diverse publicaties van Van de Craats op zijn website (*http://staff.science.uva.nl/~craats/*).
[3] Job van de Groep: *Gegoochel met getallen*.Te bestellen bij de auteur (*jobini@planet.nl*); ISBN 978-90-81-2648-1-5.
[4] Zie *www.waag.org* en http://mobilemath.nl
[5] - Mark Haddon (2003): *The curious incident of the dog in the night-time*. Vintage Contemporaries; ISBN 1-4000-7783-4.
- Daniel Tammet (2006): *Born on a blue day*. Hodder & Stoughton 2006; ISBN 978-03-40-8997-5-5
[6] Zie *www.steunpuntautismenoord-holland.nl*

Over de auteurs
Gert de Kleuver en Joke Verbeek maken beiden deel uit van de redactie van *Euclides*.
E-mailadressen: *g.de.kleuver@gmail.com*



Aankondiging / Symposium XIV van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

DOEN OF DENKEN?
Winst en verlies bij handige methoden in de schoolwiskunde

Toelichting

Binnen de (school)wiskunde vindt een constante ontwikkeling plaats naar handiger notaties en snellere technieken en algoritmen. Soms wordt ook een geheel nieuwe weg gevonden waardoor methoden die tot dan toe moeizaam waren, in één keer door een veel eenvoudiger aanpak vervangen kunnen worden. Dat is winst.
Een nadeel kan zijn dat veel van de nieuwe methoden zich lenen voor een algoritmische, vrijwel gedachteloze manier van werken, waarbij de gebruiker nauwelijks meer een idee heeft wat hij/zij aan het doen is. Dat is verlies.

Programma

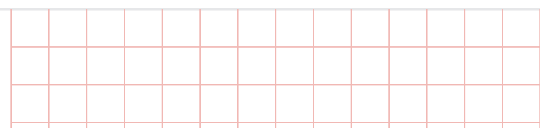
Het symposium bestaat uit vier voordrachten/workshops: twee binnen een meetkundelijn, twee binnen een rekenen-/algebralijn.
Binnen de meetkundelijn staat de introductie van algebraïsche technieken in de meetkunde centraal. Met het gebruik van algebra in de meetkunde kun je sommige dingen veel handiger en sneller doen dan met een synthetische aanpak. Dat begon al in de 17e eeuw en leidde in de vorige eeuw tot schoolvakken als analytische meetkunde en vectormeetkunde. Verstrik je jezelf dan niet in het rekenwerk met verwaarlozing van het meetkundig inzicht? Die discussie is nog steeds actueel.
Binnen het rekenen is de techniek van het vermenigvuldigen en delen altijd sterk in ontwikkeling geweest. Ouders herkennen vaak niet meer de aanpak die hun kinderen toepassen. Soms zien we ook een teruggrijpen op oudere technieken om het rekenen weer meer inzichtelijk te maken. Winst of verlies?
Het oplossen van tweedegraads vergelijkingen werd in de 19e eeuw op de universiteit geëxamineerd. Nu is dat al lang schoolstof. Welke technieken hebben het oplossen van vergelijkingen makkelijker gemaakt? Zijn we daarbij ook niet het een en ander aan inzichtelijk werken kwijt geraakt? Resulteren pogingen om dat te herstellen er niet in dat leerlingen nu eigenlijk niets meer echt goed kunnen?

Sprekers

Wil Oonk over de geschiedenis van het leren en onderwijzen van het vermenigvuldigen, met een accent op de oorsprong en de ontwikkeling van het prille vermenigvuldigen.
Harry Sitters over het binnendringen van de algebra binnen de meetkunde in de 17e eeuw en de opvattingen van Sybrandt Cardinael daarover.
Aad Goddijn over algebraïsering van de schoolmeetkunde in de 20e eeuw.
Martin Kindt over historische ontwikkelingen in het oplossen van vergelijkingen.

Plaats, tijd, aanmelden, kosten

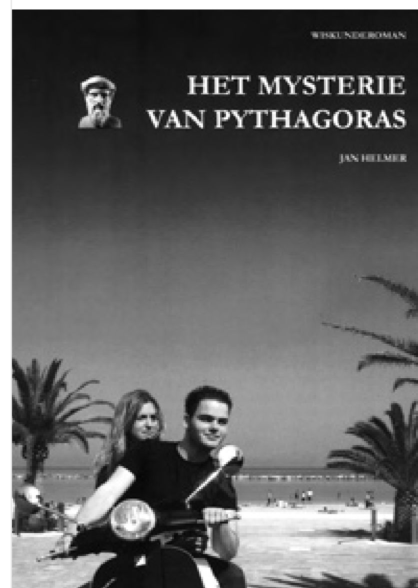
Zaterdag 17 mei 2008, Hogeschool Domstad, Koningsbergerstraat 9, Utrecht.
Van 10:15 tot 15:30 uur.
Aanmelding door het zenden van een e-mail aan Harm Jan Smid (*h.j.smid@ipact.nl*) onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op girorekening 4657326 t.n.v. HKRWO te Leiden.



Boekbespreking / Het mysterie van Pythagoras

[Peter Lanser]

Er zijn weinig boeken die wiskunde combineren met een spannend verhaal. Dat is helemaal niet erg, want wiskunde op zich is al heel boeiend. Desondanks wordt mijn interesse gewekt als een boek het predicaat 'wiskunderoman' meekrijgt. Jan Helmer, docent wiskunde op het Blariacumcollege in Venlo, publiceerde eind 2007 'Het mysterie van Pythagoras'.
Hoofdpersoon is de uit Manchester afkomstige Sophia, die een van de gelukkigen is die een week naar een partnerschool in Zuid-Italië gaat. Ze komt er terecht in een gastgezin, waar zoonlief Matteo het liefst de hele dag op zijn Vespa over het strand rijdt, en veel spijbelt. Zijn wiskundedocent Di Santis vindt hem een klaploper, en hoopt hem met een wiskundetoets definitief van school te krijgen. Dan duikt plotseling in het leven van Matteo Pythagoras op.
Pythagoras is ontsnapt van de planeet Symmetria, een planeet waar de bewoners voor 99% procent lijken op de bewoners van planeet Aarde, waar wegen en steden streng wiskundig zijn aangelegd, iedereen eeuwig leeft, en critici in een inrichting geplaatst zijn. Pythagoras was geïnterneerd wegens het overtreden van het Symmetriaans ruimterecht, dat zegt dat je op de planeet Aarde geen sporen mag achterlaten die verwijzen naar Symmetria.
Pythagoras wil Matteo helpen bij het voorbereiden van de o zo belangrijke wiskundetoets, maar zijn wijsheid komt ook van pas als blijkt dat de ouders van Matteo zijn ontvoerd. Matteo's vader is een bestrijder van de maffia, maar wordt snel bevrijd. Het feitelijke doelwit was namelijk Matteo. Die besluit te vluchten, samen met Sophia. En mét Pythagoras, die door Symmetrianen gezocht wordt. Pythagoras moet in een grot een zilveren beker terugvinden, en ergens anders een perkament, om zo zijn aardse sporen uit te wissen.
Gedurende de vlucht vertelt Pythagoras uitgebreid over verbanden, vergelijkingen, verhoudingen, kwadratische getallen, priemgetallen, en niet te vergeten natuurlijk over zijn leven zelf.
De achterflap vermeldt dat "'Het mysterie van Pythagoras' een spannend boek [is] voor middelbare scholieren die moeite hebben met of juist plezier hebben in wiskunde, maar ook voor volwassenen die de huidige wiskunde nog eens in een boeiende context willen tegenkomen". Is Jan Helmer daarin geslaagd?
De publicatie van dit boek verdient op zich lof, het getuigt mijns inziens van durf om wiskunde in romanvorm te presenteren.
Ik heb evenwel ambivalente gevoelens bij het boek.
De wiskunde is op zich aardig gepresenteerd, maar ik vind het verhaal onevenwichtig. Het wordt beschreven vanuit Sophia's perspectief, maar dat wordt abrupt en tegelijkertijd kortstondig doorbroken. Daarnaast is het bijvoorbeeld zeer onwaarschijnlijk dat een tiener een echte wijnkenner is. De hoofdpersonen komen niet tot leven, en zijn opzichtig stereotiep: Sophia is een Engelse puber die zichzelf lelijk vindt, Matteo is een knappe, luie Italiaan. Het verkeerd spellen van de namen van de wiskundigen Gödel en Goldbach als Göbel en Golbach vind ik bijzonder onzorgvuldig en ronduit storend.
Aan de andere kant: heb ik als liefhebber van wiskunde én literatuur niet gewoon veel te hoge verwachtingen? Verwachtingen die overigens wel door de achterflap gevoed worden: 'Een wiskundeboek in de literatuur, of toch, een literair boek in de wiskunde? Overstijgt alle vakken, van wiskunde tot filosofie…'
Misschien is het wel van veel meer belang dat het boek middelbare scholieren aanspreekt, die naar ik vermoed anders tegen dit boek zullen aankijken. Die mijn kritiek muggenzifterij zullen vinden. Daarom heb ik twee van mijn vwo-5-werkers (leerlingen) die geïnteresseerd zijn in de wiskunde, gevraagd het boek te lezen. Hun bevindingen blijken inderdaad anders te zijn. Voor één van deze twee leerlingen is het verhaal goed gekozen; de ander vindt het niet zo spannend maar hij looft de door de schrijver gemaakte tekeningen. De wiskunde vinden ze beiden aan de makkelijke kant.
Een literair boek is 'Het mysterie van Pythagoras' in mijn ogen niet, maar dat zal door middelbare scholieren mogelijk anders beleefd worden. Wijs hen op het bestaan van dit boek.



Auteur: Jan Helmer
Uitgave in eigen beheer, Venlo (2007)
ISBN 978-90-811843-1-1
Prijs: € 16,90 (135 pagina's)
te bestellen via www.pythagorasproject.nl

Over de recensent
Peter Lanser is wiskundedocent en teamleider vwo-5&6 op de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven.
E-mailadres: *p.lanser@wpkeesboeke.nl*

Wiskunde in Wetenschap: Optimaliseren in netwerken

WISKUNDE D IN DELFT

[Wim Caspers, Jeroen Spandaw en Agnes Verweij]

Inleiding

Sinds de oprichting van het Regionale Steunpunt Wiskunde D in september 2006 heeft de Technische Universiteit Delft zich gericht op twee activiteiten op het gebied van wiskunde D vwo: het scholen van docenten voor alle domeinen en het ontwerpen van onderwijs voor het domein Wiskunde in wetenschap van dit nieuwe schoolvak. De scholing werd en wordt in samenwerking met de Technische Universiteit Eindhoven, de Universiteit Twente en de Radboud Universiteit Nijmegen verzorgd onder de naam *(Dieper) in zee met wiskunde D* [1]. Ook het werk voor *Wiskunde in wetenschap* is bij deze vier universiteiten op dezelfde manier aangepakt: door een 'kerngroep' van vwo-docenten, aangevuld met universitaire medewerkers, worden lesmateriaal en docentenhandleidingen gemaakt, in de klas uitgeprobeerd en bijgesteld.

Door de kerngroepen in Eindhoven en Twente wordt gewerkt aan lesmateriaal met als onderwerpen (onder andere) *Cryptografie* respectievelijk *Modelleren*. Beide universiteiten berichtten hier al eerder over in *Euclides* [2]. De kerngroep in Nijmegen houdt zich bezig met het onderwerp *Astrofysica*; in Delft is gekozen voor het onderwerp *Optimaliseren in netwerken*. Hieronder vindt u een beschrijving van de opzet van het Delftse lesmateriaal, voorbeelden van illustratieve stukjes ervan en een samenvatting van de ervaringen met de eerste versies van onze modules in vwo-klassen.

Keuze van het onderwerp

Dat we in Delft hebben gekozen voor *Optimaliseren in netwerken* heeft een aantal redenen. Dit onderwerp kan eenvoudig geïntroduceerd worden bij leerlingen in 4-vwo omdat geen wiskundige voorkennis van de bovenbouw nodig is en het kent voldoende mogelijkheden voor verdieping om ook voor 6-vwo interessant te zijn. *Optimaliseren in netwerken* bevat een aantal onderdelen die onafhankelijk van elkaar behandeld kunnen worden. Het gebied is rijk aan toepassingen en ook zeker doorstroomrelevant – het maakt deel uit van diverse opleidingen (onder andere werktuigbouwkunde en technische wiskunde) in Delft – en het biedt de leerling een aardig inkijkje in wat wiskunde in het hoger onderwijs zou kunnen inhouden. Bovendien weet de Delftse kerngroep [3] zich gesteund door de onderzoeksgroep Optimaliseren van de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica [4].

Inhoud van de modules

Als uitgangspunt diende een drietal teksten: het boek uit de Epsilonreeks 'Operationele Analyse' van Henk Tijms [5], het Delftse collegedictaat 'Optimaliseren in netwerken' van Kees Roos [6] en het Amerikaanse studieboek 'Introduction to Operations Research' van Hillier & Lieberman [7]. Op advies van vakdeskundigen van de TU koos de kerngroep een aantal optimaliseringsproblemen uit die elk met een eigen, specifiek op het betreffende probleem toegesneden methode opgelost kunnen worden. Lineair programmeren als aanpak voor een grotere klasse van optimaliseringsproblemen wordt bewaard voor een practicum voor vwo-leerlingen aan de TU, waarop we hieronder terugkomen. Door in de modules de aandacht op de specifieke methoden te richten, kan een breed scala aan algoritmen de revue passeren. Op deze manier wordt zowel de beoogde onderlinge onafhankelijkheid van de modules als de gewenste variatie in moeilijkheid bereikt.

Opzet van de modules

Omdat de teksten van Tijms, Roos en Hillier & Lieberman niet zomaar geschikt zijn voor gebruik op school, werd begonnen met het schrijven van leerlingenteksten op vwo-niveau, inclusief opgavenseries met antwoorden en toetsvragen. Van meet af aan was het echter de bedoeling om leerlingen de mogelijkheid te bieden om ook de oorspronkelijke hoofdstukken uit Tijms en Hillier & Lieberman te bestuderen, als de docent dit in zijn klas haalbaar acht. Bij sommige modules is daarom een handreiking geschreven om leerlingen hierbij te helpen. Aan de hand van 'wiskundige tekstverklaringsvragen' wordt de leerling door de tekst geleid. Voorbeelden van dergelijke vragen zijn: 'Waarom worden de capaciteiten van de extra takken zo gekozen?', 'Verzin een voorbeeld bij deze alinea', 'Controleer met een figuur of de gegeven oplossing klopt.' Op die manier raakt de leerling al enigszins vertrouwd met het lezen en bestuderen van Nederlandse en Engelstalige wiskundeboeken voor gevorderden. De docent zou er dan voor kunnen kiezen de leerlingen daarnaast leerlingenteksten niet of slechts gedeeltelijk te laten gebruiken.

Ten slotte richtten we ons op het schrijven van programmatuur voor de grafische rekenmachine. Diverse algoritmen voor het oplossen van optimaliseringsproblemen lenen zich daarvoor. Ook hier is het weer aan de docent om de programmaatjes al dan niet ter beschikking te stellen. De leerlingen kunnen ook uitgedaagd worden zelf zo'n programma te schrijven.

In feite zal het eindproduct van de kerngroep één grote docentenhandleiding zijn, waaruit naar believen geput kan worden.

Het materiaal in de handleiding kan bovendien niet alleen gebruikt worden om lessen over *Wiskunde in wetenschap* mee in

te richten; het is ook geschikt als achtergrondmateriaal voor leerlingen die een praktische opdracht over (een onderdeel van) *Optimaliseren in netwerken* maken. Hierdoor wordt bijgedragen aan realisering van de gedachte achter de huidige vernieuwingen van de tweede fase van havo en vwo om aan de school en aan de docent meer ruimte te laten en keuzes te bieden.

Vijf modules

Naast een korte inleidende module zijn er tot nu toe modules geschreven over Minimale opspannende bomen, Steiner-punten, Kortste-pad-problemen, Maximale stromen en Minimale-kosten-maximale-stroom-problemen. Van twee van deze modules is een fragment als voorbeeld afgedrukt (***zie de kaders 1 en 2 op pag. 308 e.v.***).

Welke keuze uit de vijf modules ook gemaakt wordt, er zal altijd wel met de inleidende module begonnen moeten worden. De module *Minimale opspannende bomen* is een goed vervolg, omdat deze van de overige modules het eenvoudigst is. Daarna zijn verschillende volgordes mogelijk. Afhankelijk van de keuzes die de docent maakt om materialen wel of niet in te zetten, is de verwachting dat met elke module ongeveer 4 tot 6 lessen gemoeid zijn.

Ervaringen in de klas

Eind vorig schooljaar zijn vroege versies van de bovengenoemde modules, behalve die over Steinerpunten, uitgeprobeerd in 3, 4 en 5 vwo-klassen. Leerlingen en docenten zijn na afloop uitgebreid bevraagd [8].

Van tevoren waren de verwachtingen van de leerlingen niet hooggespannen. Desgevraagd meldde een groot gedeelte helemaal geen verwachtingen te hebben van het onderwerp *Optimaliseren in netwerken* en verder liepen de reacties uiteen van ‘iets vaags en ingewikkelds’ tot ‘interessant’ en ‘kan ik iets van leren’. Na afloop van een aantal lessen beoordeelde een meerderheid het gebodene als ‘leuk’. Opmerkingen die daarbij gemaakt werden varieerden van ‘ik kijk liever tv’, via ‘wel leuk om iets anders te doen’ tot ‘heel interessant en uitdagend’.

Deelnemende docenten waren vooral benieuwd of het Engelstalige studiemateriaal goed zou vallen. Dat bleek nogal verschillend uit te pakken. Op een school met tweetalig onderwijs leverde het geen problemen op. Sommige leerlingen prefereerden zelfs de Engelse tekst. In andere klassen verliep het moeizamer. Soms oordeelden leerlingen dat je er nog wel uitkwam als je goed je best deed. Anderen vonden het te moeilijk en hielden het al snel voor gezien, al helemaal wanneer ook Nederlandse teksten ter beschikking werden gesteld. Docenten concludeerden dat het gebruik van Engels- en ingewikkelder Nederlandstalige teksten uit de genoemde boeken een goede begeleiding vereist. (De hiervoor bedoelde handreiking voor leerlingen was toen nog niet gebruiksklaar.)

De moeilijkheidsgraad van de stof uit deze eerste modules viel de leerlingen mee. In derde klassen ‘moest je het wel even zien’, in vierde klassen was het ‘goed te doen’ en in vijfde klassen werd het ‘niet moeilijk’ gevonden. Een enkeling had behoefte aan wat meer ‘echte wiskunde, bewijzen en zo’.

Zowel het onderwerp, als de manier van aanbieden, als de afwijkende lesmaterialen ontlokten de leerlingen opmerkingen dat dit ‘andere wiskunde’ was dan ze gewend waren. ‘Vernieuwend’, ‘nuttig’ en ‘handig voor later’ werd het genoemd.

De flexibiliteit (de modules waren ook digitaal ter beschikking gesteld) werd door de docenten op prijs gesteld. Opvallend was de diversiteit in de manier waarop de stof werd aangeboden. Er werd in groepjes gewerkt, of twee aan twee, soms voorafgegaan door een klassikale inleiding. Wel of niet de (volledige) leerlingenteksten beschikbaar stellen, wel of geen grafische rekenmachine gebruiken, wel of geen Tijms of Hillier & Lieberman er bij halen, de vakman/vakvrouw voor de klas bleek de mogelijkheid om eigen keuzes te maken graag aan te grijpen.

Dat het de eerste versies waren die gebruikt werden, was duidelijk te merken. Zowel docenten als leerlingen vonden dat met name aan de lay-out nog wel wat te verbeteren viel.

Leerlingen naar Delft

Dit schooljaar werkt de kerngroep, behalve aan het verbeteren van de eerste modules en het schrijven van nieuwe modules, aan een practicum voor leerlingen dat gevolgd kan worden aan de TU Delft. Het geleerde kan dan toegepast en uitgebreid worden, bijvoorbeeld door te werken met Excel-spreadsheets en te leren omgaan met Excel-add-ins die gebaseerd zijn op lineair programmeren. Een uitgebreidere opdracht wordt in een dag of dagdeel gemaakt en eventueel voltooid als huiswerk.

De kerngroep wil ook vertrouwde Delftse activiteiten als *Wiskunde in actie* [9] en het *Scholierenlab* [10] gaan betrekken bij *Wiskunde in wetenschap*.

Meedoen met Delft

De kerngroep verwacht eind maart de nieuwe versies van de vijf modules klaar te hebben voor gebruik in 4- of 5-vwo. De derde klas behoort niet tot de doelgroep, ook al zijn de eerste modules daar wel bruikbaar. De nieuwe versies zullen ook weer eerst getest worden. Het is de bedoeling dat in mei of juni van dit schooljaar de eerste leerlingen in Delft verwelkomd worden voor het volgen van het practicum. Komend schooljaar zal het een en ander beschikbaar komen via Blackboard, de elektronische leeromgeving van de TU Delft.

Belangstellende docenten die dit schooljaar al een of meer modules met leerlingen willen uitproberen of komend schooljaar met *Optimaliseren in netwerken* aan de slag willen gaan, worden van harte uitgenodigd contact op te nemen. In overleg wordt dan bekeken op welke manier en op welke termijn de materialen van de Delftse kerngroep het beste kunnen worden ingezet.

Kerngroep wiskunde D Delft

Liesbeth Bos - Scala College, Alphen aan den Rijn
Wim Caspers - TU Delft / Adelbert College, Wassenaar
Wim van Dijk - Montessori Lyceum, Rotterdam
David Lans - Emmaus College, Rotterdam
Jan Moen - Int. College Edith Stein, Den Haag
Rob van Oord - Coenecoop College, Waddinxveen
Sanne Schaap - Marecollege, Leiden
Jan Schrik - Christelijk Lyceum, Delft
Jeroen Spandaw - TU Delft
Agnes Verweij - TU Delft

Noten

[1] Zie voor meer informatie over deze scholing bijvoorbeeld www.wiskundedsteun.nl

[2] - Hans Sterk: *Steunpunt TU/e: Wiskunde in Wetenschap*. In: *Euclides* (3), december 2007, jaargang 83, pp. 105–107;
- UT-Kerngroep: *Wiskunde in Wetenschap: Visie op een domein in Wiskunde D*. In: *Euclides* (5), maart 2007, jaargang 82, pp. 173–175.

[3] De namen en scholen van de kerngroepleden staan in de laatste paragraaf van dit artikel.

[4] Met name prof.dr.ir. C. Roos en dr. J. Melissen.

[5] Henk Tijms (2004): *Operationele analyse*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

[6] Kees Roos (2006): *Optimaliseren in netwerken*. Collegedictaat Kaleidoscoop, Technische Universiteit Delft.

[7] F.S. Hillier, G.J. Lieberman (2005): *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill International Edition.

[8] W.M. van der Wijden (2007): *Wiskunde D in de kinderschoenen, Experimenten 'Optimaliseren'*. TULO, Technische Universiteit Delft.

[9] 'Wiskunde in actie' is een dag met lezingen en workshops waarin leerlingen zelf actief aan de slag gaan om kennis te maken met (onverwachte) toepassingen van wiskunde.

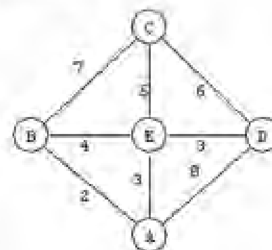
[10] *www.scholierenlab.nl* is een vraagbaak waar leerlingen van 5- en 6-vwo terecht kunnen met vragen over hun ontwerpopdracht, hun natuurwetenschappelijk onderzoek of profielwerkstuk.

Kader 1

Uit module 1: *Minimale opspannende bomen*

Oefening

Gegeven is de gewogen graaf hiernaast.



1. Teken twee opspannende bomen, één met totaal gewicht 16 en één met totaal gewicht 26.
2. Kun je een opspannende boom tekenen met een totaal gewicht kleiner dan 16?

Het algoritme van Prim

We gebruiken de graaf uit de laatste oefening om uit te leggen hoe dit algoritme werkt.

Stap 1 — Kies een willekeurig punt van de graaf, bijvoorbeeld C. Neem nu een met dit punt verbonden lijn waarvan het gewicht zo laag mogelijk is. Dit is de lijn van C naar E; *zie figuur 12a*.

Stap 2 — Zoek onder alle verbindingslijnen tussen een **niet** verbonden punt en een inmiddels **wel** verbonden punt, de lijn met het laagste gewicht. Dit is bijvoorbeeld de lijn van A naar E; *zie figuur 12b*.

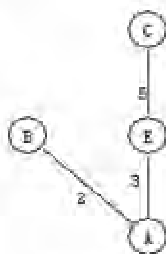
Stap 3 — Herhaal stap 2 totdat een opspannende boom is ontstaan. *Zie de figuren 12c en 12d*.



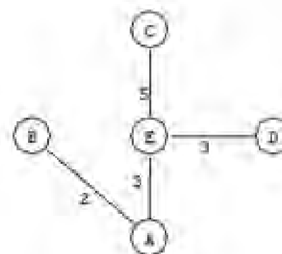
figuur 12a



figuur 12b



figuur 12c



figuur 12d

Kader 2

Uit module 3: *Maximale stromen*

In november 2006 legde een stroomstoring een gedeelte van Europa plat. Overal moesten de kaarsen aan. Doordat een gedeelte van het elektriciteitsnet uitviel, was er te weinig **capaciteit** om aan de vraag te voldoen.

Om na te gaan of er aan de vraag kan worden voldaan, kun je gebruik maken van het optimaliseren van de grootte van een stroom in een netwerk. Je kijkt dan hoe groot de maximaal mogelijke stroom is in het net. In november kon er te weinig "stroom" van de ene plaats naar een andere plaats gestuurd worden via het nog werkende gedeelte van het netwerk.

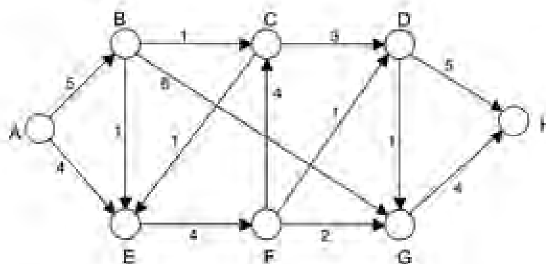
Een probleem waarbij je nagaat hoe groot de maximale stroom is die van de ene plaats in een netwerk naar een andere plaats in het netwerk gestuurd kan worden, noemt men: een maximale-stroom probleem.

Definitie 1: Bij een **maximale-stroomprobleem** ga je na hoe groot de maximale stroom is, die je van een beginknoop "**bron**", naar een eindknoop "**put**" kan sturen.

Daarbij kan "stroom" meer betekenen dan de letterlijke vertaling. Er kan een stroom aan informatie, boodschappen, voertuigen, vloeistof, elektriciteit, enzovoorts worden bedoeld. Vaak wordt daarbij duidelijk op welke plaatsen in het netwerk problemen ontstaan.

Een voorbeeld van een netwerk waarbij de maximale stroom bepaald kan worden is gegeven in *figuur 1*.

figuur 1



Knoop A stelt bijvoorbeeld een olieveld voor en knoop H de raffinaderij. Knoop A is hier de "bron" en knoop H de "put". Er moet zoveel mogelijk olie door het netwerk van pijpleidingen gestuurd worden van A naar H. Langs de takken in het netwerk staan getallen, die de **maximale capaciteit** (eenheden olie) aangeven die door een pijpleiding gestuurd kan worden.

Over de auteurs
Wim Caspers is als vwo-docent 'in residence' verbonden aan de TU Delft en als conrector onderwijs a.i. aan het Adelbert College in Wassenaar. Met hem kunt u contact opnemen over (gebruik van) het wiskunde D-lesmateriaal voor Optimaliseren in netwerken.
E-mailadres: *w.t.m.caspers@tudelft.nl*
Jeroen Spandaw en Agnes Verweij zijn docent wiskunde en didactiek van de wiskunde aan de TU Delft. Met hen kunt u contact opnemen over de scholings-activiteiten voor wiskunde D in Delft.
E-mailadressen: *j.g.spandaw@tudelft.nl* en *a.verweij@tudelft.nl*

Digitaal toetsen

DE COMPUTER ALS LEERLINGBEGELEIDER EN EXAMINATOR

[Bernadette Kruijver en Jos Tolboom]

Welke voordelen heeft digitaal toetsen boven schriftelijk toetsen?
Kun je ook digitaal toetsen bij wiskunde?
Welke programma's zijn daarvoor?
Welke docent heeft zowel tijdgebrek als een computer?

Inleiding

Toetsen spelen een belangrijke rol in het onderwijs. Dat is zeker duidelijk bij *summatieve* toetsen (toetsen *van* het leren), waarop leerlingen een formele beoordeling krijgen en waarop bevordering of zelfs diplomering gebaseerd wordt. Van *formatieve* toetsen (toetsen *om* te leren) is het belang misschien minder duidelijk. Huiswerkopdrachten, portfolio's en onderwijsleergesprekken in de klas tellen zelden mee in de beoordeling, maar zijn wel van essentieel belang voor het leerproces. Bij een formatieve toets gebruikt de docent (of de leerling zelf, of beiden) de resultaten van de test om het leerproces aan te passen. Hierdoor is formatief toetsen een effectieve manier om het onderwijs te verbeteren. Diverse onderzoeken hebben aangetoond dat de kwaliteit van het onderwijs significant verbeterd kan worden als leerlingen regelmatig formatief getoetst worden (Black, 1993; Black & Wiliam, 1998; Black, 2003). De leerlingen worden op deze manier aangezet om een actieve houding in hun leerproces aan te nemen. Bovendien kan het leerproces adequaat worden bijgestuurd.
In dit artikel kijken we naar invoering van digitale toetsen in wiskundeonderwijs. Het is een beschrijving van een onderzoek dat is gedaan door de Rijksuniversiteit Groningen en Wolters-Noordhoff.

Digitaal toetsen

Formatief toetsen is dus belangrijk, blijkt uit onderzoek. Toch wordt formatief toetsen niet veel toegepast, onder andere omdat het veel tijd kost om alle tussentoetsen na te kijken en van goede feedback te voorzien (Stiggins, 2001; Stiggins, 2002). Door de toetsen af te nemen en te beoordelen met de computer wordt docenten echter veel werk uit handen genomen. Dit maakt het mogelijk om vaker te toetsen zonder dat het extra werklast met zich meebrengt. De automatisering van het nakijkproces maakt ook directe terugkoppeling naar de leerling mogelijk. Elke leerling krijgt afhankelijk van het gegeven antwoord direct feedback en kan daarvan tijdens de rest van de toets gebruik maken. Bovendien kan het niveau van de toets worden aangepast aan de leerling. Bij dit zogenaamde *adaptief toetsen* worden de vragen pas tijdens de afname geselecteerd uit een database. Na elk antwoord wordt het niveau van de kandidaat geschat en aan de hand daarvan wordt de volgende vraag geselecteerd. Hierdoor is het mogelijk om met minder vragen een nauwkeuriger beeld van de leerling te krijgen. Verder zijn leerlingen niet meer gebonden aan plaats en tijd als de toetsen via het internet [1] afgenomen worden. Ook kunnen met een digitale toets vaardigheden getoetst worden die bij schriftelijke toetsen niet aan bod komen. Ten slotte kunnen door het gebruik van audiovisuele media vragen in een meer reële context gesteld worden.
De bovengenoemde voordelen gelden voor een groot deel ook als digitale toetsen summatief worden ingezet. Dan komen de beperkingen van digitaal toetsen echter duidelijker naar voren. Het grootste probleem vormt het automatisch nakijken van open vragen. Juist bij wiskunde is het ongebruikelijk om meerkeuzetoetsen af te nemen, omdat het oplossingsproces belangrijker is dan het eindantwoord. Daarbij komt dat bij open vragen formules en symbolen moeten kunnen worden ingevoerd. Bovendien is er vaak een aantal gelijkwaardige antwoorden dat goed gerekend moet worden. De meeste toetssoftware is hiertoe nog niet in staat. Ook vormt het toetsen van praktische vaardigheden een probleem. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het hanteren van een geodriehoek of passer en het tekenen van ruimtelijke figuren of grafieken.

Ondanks de bovengenoemde bezwaren is het echter niet onmogelijk om digitaal te toetsen bij wiskunde. Natuurlijk zal de eerste keer dat een digitale toets afgenomen wordt, net als elke verandering, de nodige aandacht vereisen. Het vraagt enige organisatie en inzet van de docent om te leren omgaan met een toetsprogramma, maar op de iets langere termijn kan digitaal toetsen juist een tijdsbesparing opleveren.

Redenen om formatief te toetsen:
- activering van leerlingen
- inzicht in het leerproces
- bijsturing van het leerproces

Redenen om digitaal te toetsen:
- tijdsbesparing in correctiewerk voor de docent
- directe terugkoppeling naar de leerling
- mogelijkheid van audiovisuele media ter ondersteuning van de opdrachten
- flexibiliteit in de afname
- adaptiviteit aan de leerling

Digitaal toetsen bij wiskunde

Digitale toetsen kunnen worden ingezet om vaardigheden te toetsen die niet aan bod komen op papier. Denk bijvoorbeeld aan het werken met software als MS *Excel*, zoals gebeurt bij de Compex eindexamens VWO Wiskunde A1 en A12 en waarschijnlijk zal gebeuren bij het Compex examen Wiskunde C. Vaak zullen digitale toetsen echter worden ingezet als vervanging van een schriftelijke toets. Dan is het belangrijk dat een digitale toets voor een leerling ongeveer dezelfde score oplevert als een schriftelijke toets zou hebben gedaan. Dit was de aanleiding voor een onderzoek aan de Rijksuniversiteit Groningen in samenwerking met Wolters-Noordhoff.
Hiervoor hebben we de digitale toetsen bij de methode *Moderne wiskunde* (Wolters-Noordhoff) vergeleken met de schriftelijke toetsen bij deze methode. Twaalf brugklassen verdeeld over vijf scholen maakten een proefwerk dat voor de helft schriftelijk en voor de helft digitaal werd afgenomen. Het schriftelijke deel

bestond voornamelijk uit open vragen, waarbij de leerlingen berekeningen moesten geven en grafieken en figuren moesten tekenen. Bij het digitale gedeelte werden alleen vragen gesteld waarop een kort, numeriek antwoord gegeven kon worden. Verder werden er meerkeuzevragen aangeboden (***zie figuur 1 op pagina 313***). De toets was zo samengesteld dat de digitale en schriftelijke opgaven één op één equivalent waren en alleen in context en getallen verschilden. Als onderwerpen zijn hoofdstukken over algebra en meetkunde gekozen, omdat juist hierbij speciale vaardigheden zoals het tekenen van grafieken en meetkundige figuren getoetst worden.
Ondanks de genoemde beperkingen leverden de digitale toetsen een vergelijkbare score met betrekking tot de kennis en vaardigheden van de leerlingen als de schriftelijke toetsen. Een van de bezwaren van digitaal toetsen is het niet meenemen van het oplossingsproces in de beoordeling. Het blijkt echter dat de scores op basis van een beoordeling met tussenstappen en de scores van een dichotome ('goed' of 'fout') beoordeling op dezelfde toets sterk tot zeer sterk correleren. Dat betekent dat er maar erg weinig leerlingen zijn die het eindantwoord fout hebben, terwijl de tussenstappen correct zijn uitgevoerd. De leerlingen zijn, zij het in beperkte mate, in het nadeel bij een dichotome beoordeling. Hiervoor zou gecorrigeerd kunnen worden, mits we ervan uit gaan dat alle leerlingen ongeveer even vaak een rekenfout maken.
Uit vergelijkingen van equivalente schriftelijke en digitale opgaven blijkt dat beide soorten ongeveer dezelfde score opleveren. Gemiddeld behaalde 75% van de leerlingen dezelfde score op de schriftelijke als op de digitale opgave. De overige 25% beantwoordde dus de digitale opgave goed, terwijl de schriftelijke opgave fout werd beantwoord, of andersom. Het is echter niet zo dat één van beide soorten consequent beter werd beantwoord. Slechts in een beperkt aantal opgaven was er in de score per leerling een significant verschil tussen de schriftelijke en de digitale variant. Hierbij moet echter wel opgemerkt worden dat het beeld in een klein aantal gevallen, waarbij de opgave door vrijwel alle leerlingen goed beantwoord werd, vertekend kan zijn.
Verder is er niet gekeken naar mogelijke verschillen tussen leerlingen die in eerdere proefwerken hadden laten zien dat ze sterk dan wel zwakker in wiskunde waren. Ten slotte zou verder onderzocht moeten worden of deze resultaten ook bereikt kunnen worden in hogere leerjaren waar vaker meerstapsvragen gesteld worden.

Verschillende programma's

Bij het onderzoek zijn de digitale toetsen bij *Moderne wiskunde* gebruikt. Er zijn echter veel meer manieren om digitale toetsen af te nemen. Bij de meeste wiskundemethoden [2] bieden de uitgeverijen tegenwoordig aansluitende digitale toetsen aan. Uiteraard is het ook mogelijk om eigen materiaal te maken, bijvoorbeeld met *WinToets* [3], een veel gebruikt toetsprogramma in het voortgezet onderwijs. Of met een programma dat specifiek op het vak wiskunde gericht is, zoals *Maple Testing and Assessment* [4] van *Maplesoft* en de *Digitale Wiskunde Oefenomgeving* [5] van het *Freudenthal Instituut*. Elk programma heeft zijn eigen voor- en nadelen, niet alleen wat betreft de mogelijkheden op wiskundegebied, maar ook met betrekking tot de manier waarop de toetsen worden aangeboden (netwerk- of webgebaseerd) en de beschikbaarheid van materiaal en de mogelijkheden om eigen materiaal te ontwikkelen. Hieronder gaan we daarop in.

De toetsen bij *Moderne wiskunde* worden aangeboden in de toetsomgeving *Schoolwise*. De proefwerken bij de methoden *Netwerk* en *Getal & Ruimte* (EPN) gebruiken hetzelfde systeem. Digitaal toetsen wordt op deze manier erg eenvoudig gemaakt voor de docent, want de toetsen zijn al beschikbaar. Het is in dit systeem niet mogelijk om essayvragen na te kijken en daarom worden er vooral korte open vragen (bijvoorbeeld met een numeriek antwoord) en meerkeuzevragen gesteld. De variatie in meerkeuzevragen is erg groot. Leerlingen moeten bijvoorbeeld antwoorden in de juiste volgorde plaatsen, juiste antwoordparen combineren of het antwoord naar de juiste plaats slepen. Het systeem biedt ook mogelijkheden voor het aanbieden van diverse soorten audiovisuele bronnen. Daarnaast kunnen er vragen worden aangeboden waarbij externe applicaties worden gestart; denk hierbij bijvoorbeeld aan VU-grafiek voor het onderzoeken van grafieken.
Docenten die hun eigen vragen willen maken, zijn aangewezen op andere programma's. Een van de mogelijkheden hiervoor is het eerder genoemde programma *WinToets*. Hiermee is het mogelijk eigen materiaal te maken en uit te wisselen met collega's. Verder biedt het programma een groot scala aan vraagtypen. Bijzonder hierbij is het type *hotspot*, waarbij leerlingen in een afbeelding de juiste plaats moeten aanwijzen, of een tekst of afbeeldingen naar de juiste plaats moeten slepen (***zie figuur 2***). In tegenstelling tot de meeste andere programma's worden bij *WinToets* de toetsen afgenomen via het netwerk van de school. Argumenten hiervoor zijn de veiligheid en stabiliteit. Er is ook een webversie beschikbaar, maar die is (nu nog) minder uitgebreid.

Het toetsen van wiskunde stelt speciale eisen aan een programma. Zo zijn *Maple Testing and Assessment* (*Maple T.A.*) en de *Digitale Wiskunde Oefenomgeving* (*DWO*) specifiek op wiskunde gericht. *Maple T.A.* sluit als toetsprogramma aan op het computeralgebrasysteem *Maple*. Zie voor een voorbeeld opgave ***figuur 3***. Voor het maken en afnemen van toetsen is de aanschaf van *Maple* echter niet vereist. De leerling kan de vragen beantwoorden in formules waarbij *Maple T.A.* in de beoordeling rekening houdt met algebraïsch equivalente formuleringen. Ook voor *Maple T.A.* moet je zelf materiaal maken of uitwisselen met collega's. Om het programma optimaal te kunnen benutten is enig programmeergevoel wel noodzakelijk. *Maple T.A.* heeft een ruim aanbod aan vraagtypen, maar de verschillende soorten meerkeuzevragen zijn voornamelijk variaties van hetzelfde.
Ten slotte verdient de *DWO* speciale aandacht. In deze omgeving worden online diverse oefeningen, applets en (zelf)toetsen aangeboden. De *DWO* biedt geen volledig dekkende hoofdstuktoetsen, maar wel zeer elegante oplossingen voor deelonderwerpen (***zie figuur 4***).
Welk programma het meest geschikt is, hangt sterk af van de situatie. Docenten hebben niet allemaal dezelfde programmeerervaring, beschikbare tijd en wensen en eisen voor een toets.

Voor wie is wat geschikt?

In deze paragraaf zullen we schetsen in welke situaties welk van de besproken programma's het meest geschikt is. De keuze voor een programma hangt in de eerste plaats af van de soort van toetsing waarvoor het programma zal worden ingezet. Als we uitgaan van een summatieve toets, valt de *DWO* af omdat hiermee slechts deelonderwerpen getoetst kunnen worden. Welke van de drie andere programma's de beste optie is, is erg docentafhankelijk. Gebruikmaken van de toetsen bij de methode, zoals *Schoolwise* (Wolters-Noordhoff), is verreweg het eenvoudigst. Nadeel is wel dat de opgaven niet kunnen worden aangepast en er geen eigen opgaven kunnen worden toegevoegd. Wie liever met eigen materiaal werkt, heeft de keuze tussen *WinToets* en *Maple T.A.* Voor beide programma's geldt overigens dat het ook mogelijk is om materiaal uit te wisselen met andere docenten. Met *WinToets* is het relatief eenvoudig om zelf toetsopgaven te maken. *Maple T.A.* biedt veel mogelijkheden

op wiskundegebied. Zonder programmeerervaring is het maken van eigen materiaal voor *Maple T.A.* behoorlijk tijdsintensief. De investering kan echter zeer de moeite waard zijn.
Alle vier programma's zijn in principe geschikt om formatief te toetsen. Het gebruik van *WinToets* ligt minder voor de hand, omdat de toetsen via het netwerk van de school worden afgenomen. De toetsen kunnen dan alleen op school worden gemaakt. De andere programma's bieden de toetsen via het internet aan, zodat ze op elk gewenst moment en op elke gewenste plaats kunnen worden gemaakt. Voor de keuze tussen de overige drie programma's gelden dezelfde argumenten als bij summatieve toetsen. Zelf toetsopgaven maken die via het internet kunnen worden aangeboden is alleen mogelijk met *Maple T.A.* De verschillende lesmethoden en de *DWO* bieden ook veel materiaal.

Conclusie en discussie

Er zijn diverse mogelijkheden voor het digitaal toetsen van wiskunde in het voortgezet onderwijs. We hebben in dit artikel een aantal programma's, al dan niet specifiek op wiskunde gericht, besproken. Er zijn echter veel meer opties, bijvoorbeeld de toetsmogelijkheden van een gekozen *Learning Management System* [6]. Het is sterk afhankelijk van de situatie welk programma het meest geschikt is. De keuze voor een systeem zal afhangen van de mate van ervaring van de docent en de wensen en eisen die aan de toets worden gesteld.
Het regelmatig afnemen van toetsen verbetert de kwaliteit van het onderwijs, doordat leerlingen geactiveerd worden en bijsturing van het leerproces mogelijk wordt. Met digitale toetsen is het mogelijk om vaker formatief en summatief te toetsen, zonder dat dit zeer tijdsintensief wordt, omdat zowel het nakijken als het geven van passende feedback geautomatiseerd kan worden. Bezwaren tegen digitaal toetsen bij wiskunde zijn het niet meenemen van het oplossingsproces in de beoordeling en de beperkte mogelijkheden tot het stellen van open vragen. Empirisch onderzoek onder twaalf brugklassen van vijf scholen laat echter zien dat digitaal toetsen voor wiskunde niet slechter hoeft te zijn dan schriftelijk toetsen. Er is een sterke correlatie tussen de scores van leerlingen op basis van beoordelingen met en zonder tussenstappen. Bovendien is er voor bijna alle opgaven geen significant verschil in de score per leerling op equivalente digitale en schriftelijke opgaven. De afgenomen digitale toetsen gaven dus hetzelfde beeld van de kennis en vaardigheden van de leerlingen als de schriftelijke toetsen.
Dit betekent niet dat alle schriftelijke toetsen vervangen kunnen worden door een digitale variant. Het is namelijk niet mogelijk om praktische vaardigheden, zoals het tekenen van grafieken en meetkundige figuren, digitaal te toetsen. Een ander probleem is het toetsen of een leerling in staat is zelfstandig een antwoord te formuleren. Hiervoor is het stellen van open vragen noodzakelijk. Mogelijkheden om die automatisch na te kijken zijn er nog niet. *Maple T.A.* is hierin duidelijk het verst.
Daarnaast moet opgemerkt worden dat de leerlingen uit het onderzoek wel even goed scoorden op de digitale en de schriftelijke toets, maar dat ze niet gewend waren om digitaal getoetst te worden. Bovendien maakten ze op dezelfde dag een schriftelijke toets. Ondanks het feit dat dit niet meegenomen werd in de beoordeling, tekenden vrijwel alle leerlingen tijdens het maken van de digitale toets nog steeds de benodigde grafieken en tabellen. Ze pasten dezelfde strategieën toe als bij de schriftelijke toets.
Als echter van tevoren bekend is dat dit soort vaardigheden niet getoetst worden, zullen ze op den duur misschien niet meer worden aangeleerd - tenzij de docent gebruik maakt van bijvoorbeeld 'screencapture software' op de computers van de leerlingen of een systeem als *TI Navigator* (Tolboom, 2005), waardoor de schermen van de rekenmachines van de leerlingen via een netwerk te vangen zijn en zo dus ook bijvoorbeeld de grafieken en tabellen. Ten slotte geven digitale toetsen docenten slechts een beperkt inzicht in het oplossingsproces van leerlingen.
Digitale toetsen kunnen schriftelijke toetsen niet vervangen, maar bieden wel een goede aanvulling. Als oplossing kunnen beide toetsen naast elkaar worden gebruikt. Op deze manier wordt het mogelijk om vaker (formatief) te toetsen, zonder dat het veel extra tijd kost, en een beetje afwisseling kan geen kwaad.

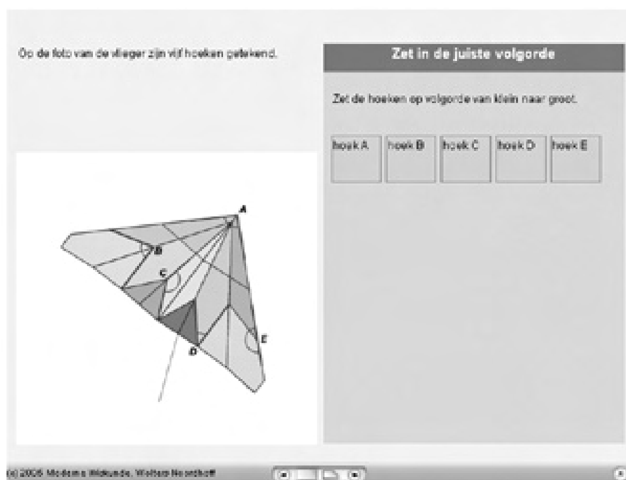
De auteurs danken Kees Karremans (Wolters-Noordhoff) voor zijn begeleiding bij het onderzoek en Pauline Vos (Rijksuniversiteit Groningen) voor haar kritische commentaar bij het schrijven van het artikel.

Noten

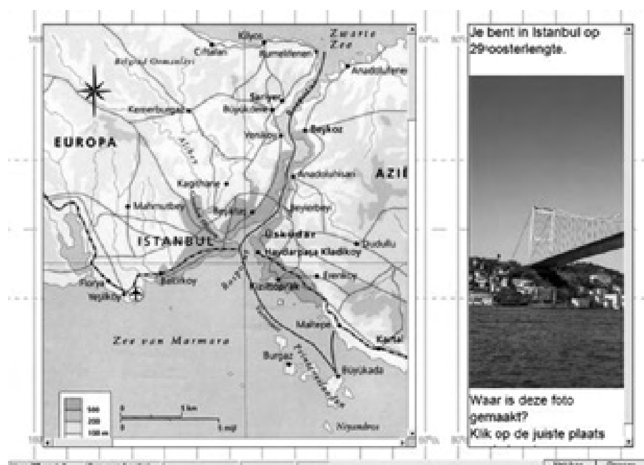
[1] Met 'internet' wordt in dit artikel een specifieke toepassing ervan bedoeld, nl. het World Wide Web.
[2] Er zijn o.a. digitale toetsen bij Moderne wiskunde (Wolters-Noordhoff), Netwerk (Wolters-Noordhoff), Getal en Ruimte (EPN), Pascal (ThiemeMeulenhoff) en Matrix (Malmberg).
[3] WinToets (De Rode Planeet); *www.wintoets.nl*
[4] Maple Testing and Assessment (Maplesoft) aansluitend op het computeralgebrasysteem Maple; *www.maplesoft.com/mapleta*
[5] Digitale Wiskunde Oefenomgeving (Freudenthal Instituut); *www.fi.uu.nl/dwo*
[6] Een Learning Management System (LMS), soms ook wel Learning Content Management System (LCMS) genoemd, behelst de software waarop (een deel van) de webgebaseerde leeromgeving is gebaseerd. In Nederland wordt hiervoor de software van Blackboard, It's learning en Teletop veel gebruikt.

Literatuur

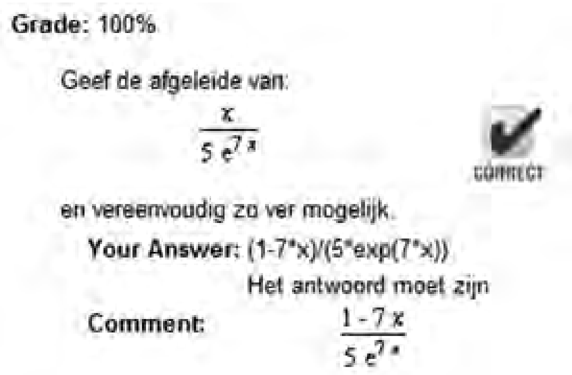
- P. Black (1993): *Formative and summative assessment by teachers*. In: *Studies in science education,* 21; pp. 49-97.
- P. Black, D. Wiliam (1998): *Assessment and classroom learning*. In: *Assessment in Education: Principles, Policy & Practices,* 5; pp. 7-68.
- P.J. Black (2003): *Assessment for learning: putting it into practice*.
- R.J. Stiggins (2001): *The Unfulfilled Promise of Classroom Assessment.* In: *Educational Measurement: Issues and Practice,* 20; pp. 5-15.
- R.J. Stiggins (2002): *Assessment Crisis: The Absence of Assessment FOR Learning*. In: *Phi Delta Kappan,* 83; pp. 758-765.
- J. Tolboom (2005): *Draadloos netwerk in de klas*. In: *Euclides,* 81; pp. 108-112.



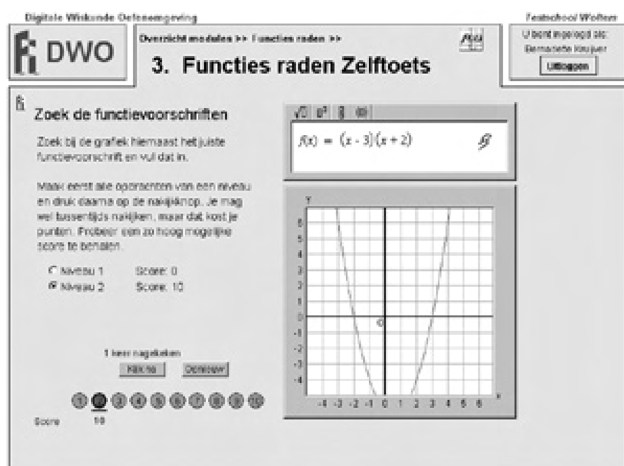
figuur 1
Een ordeningsvraag in Schoolwise (Wolters-Noordhoff)



figuur 2
Een hot spot vraag in Wintoets (De Rode Planeet)



figuur 3
Een voorbeeldopgave gecorrigeerd door Maple T.A. (Maplesoft)



figuur 4
Een voorbeeldopgave in de DWO (Freudenthal Instituut)

Over de auteurs
Bernadette Kruijver deed tijdens haar studie natuurkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen onderzoek bij Wolters-Noordhoff naar digitaal toetsen bij wiskunde. Daarna was ze lid van de Nationale Denktank en richtte zich gedurende drie maanden op de problemen in het Nederlandse onderwijs. Nu is ze werkzaam als leraar in opleiding aan het Willem Lodewijk Gymnasium in Groningen.
E-mailadres: *B.A.Kruijver@gmail.com*
Jos Tolboom is docent van de Educatie en Communicatie Master van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *j.l.j.tolboom@rug.nl*

De remweg als functie van de snelheid

EN WAT IS DAN DE AFGELEIDE?

[Gerrit Roorda, Nelleke den Braber, Pauline Vos]

Inleiding

Differentiëren in de zin van de afgeleide bepalen is belangrijk in de bovenbouw van het wiskundeonderwijs. In veel schoolboeken wordt gekozen voor een introductie vanuit het differentiequotiënt op een krimpend interval gekoppeld aan de helling van de grafiek. Daarnaast zien we allerlei contexten waarin de afgeleide de betekenis heeft van de (veranderings)snelheid.
De leerlingen moeten al de verschillende facetten van het begrip afgeleide ergens in hun geheugen opslaan, en bij het oplossen van een opdracht weer aanboren en op de juiste wijze gebruiken. Aan de Rijksuniversiteit Groningen doen wij momenteel onderzoek naar het leerproces rondom de 'afgeleide'. Eén van de opgaven die we daarbij gebruiken heet *Remweg*, en deze blijkt heel verrassend: onze deelnemers hebben nog nooit eerder een dergelijke opgave gezien en ze moeten al hun opgeslagen kennis mobiliseren om hem tot een goed einde te brengen.



figuur 1

Hoe meet je kennis over 'de afgeleide'?

Op de omslag van het boekje *Wiskundige capriolen* [1] staat een tekening van een hoofd vol hokjes met wiskundekennis (***zie figuur 1***). Allerlei wiskundige symbolen zijn in vakjes ingedeeld. Helaas is de werkelijkheid ingewikkelder: het is onmogelijk om als onderzoeker 'in het hoofd' te kijken en de positie van 'de afgeleide' op een bepaalde plaats in de hersenen te lokaliseren. Kennis zit niet in vakjes, maar eerder in netwerken. Geleerde kennis is in sommige gevallen wél en soms niet oproepbaar. Onderzoek naar het verschil tussen experts en beginners laat zien dat de kennis van experts in hun langetermijngeheugen zo is georganiseerd dat die kennis sneller oproepbaar en beter toepasbaar is. Hun kennis is georganiseerd in onderling *samenhangende schema's* en efficiënt *gekoppeld* aan *typen* situaties waarin die kennis kan worden benut [2].

Hoewel de kennis van ieder mens op geheel eigen manier is gestructureerd, is het voor het onderwijs van belang om te weten op welke manier leerlingen hun schema's ontwikkelen, aanvullen en transformeren en op welke wijze deze schema's door geschikt onderwijs opgebouwd kunnen worden.
In ons onderzoek bestuderen we de schema's voor het concept 'de afgeleide'. We bestuderen vwo-leerlingen in de loop van hun onderwijsloopbaan van klas 4 tot en met klas 6 en ook docenten in enkele niet-wiskunde-vakken, zoals natuurkunde en economie. We maken daarbij gebruik van diepte-interviews aan de hand van opdrachten. Uit de uitspraken van de deelnemers leiden we vervolgens een beeld af van het 'afgeleide-schema' van deze deelnemer.
Eén van de opdrachten van onze interviews en de interessante uitspraken hierover laten we hier zien.

De remwegopgave

De opdracht *Remweg* (***zie figuur 2***) gaat over auto's, snelheden en remmen [3]. Om de opdracht op waarde te schatten is het zinvol om hem eerst zelf te beantwoorden.

Remweg
De remweg $R(v)$ van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen. Deze remweg R in meters is een functie van de snelheid v in km/uur.
Ga er vanuit dat de maximumsnelheid van een auto 200 km/uur is.
Wat betekenen de volgende formules in termen van remweg en snelheid?

a. $R(100) = 80$
b. $R'(80) = 1{,}15$
c. $R''(v) > 0$

figuur 2

Waarschijnlijk zijn er enkele minuten verstreken tussen het lezen van deze zin, en de vorige zin van dit artikel. Misschien zijn er begrippen als versnelling, vertraging, snelheid, richtingscoëfficiënt door uw hoofd geschoten.

Deze opgave heeft een eenvoudige en herkenbare context. Afwijkend van de gangbare opdrachten is er geen functievoorschrift gegeven. Er hoeft dus niet gerekend te worden en de gevraagde antwoorden bestaan niet uit een getal, maar uit een interpretatie. Eveneens afwijkend van veel opdrachten, met name uit de natuurkunde, is dat de variabele tijd t geen rol speelt. Onze deelnemers kunnen dus niet terugvallen op routine, maar moeten al hun kennis oproepen om de weg te vinden op een niet eerder bewandeld pad.
De opgave gaat in feite over het simpele feit, dat wanneer een auto harder rijdt, de remweg langer wordt. De remweg R in meter is hier een functie van de snelheid

v in km/uur, dus de afgeleide $R'(v)$ kan worden benaderd door:

$$\frac{\Delta \textit{ remweg } (\text{m})}{\Delta \textit{ snelheid } (\text{km/uur})}$$

In cognitieve termen toetst de opgave geen *procedurele* kennis (weten hoe je iets uitrekent). De opgave richt zich meer op *declaratieve* kennis (weten wat een afgeleide is, bijvoorbeeld een globale definitie kennen) en *conceptuele* kennis (weten hoe je het begrip in verband kunt brengen met andere zaken, bijvoorbeeld het verband tussen differentiequotiënt en differentiaal-quotiënt kunnen uitleggen aan de hand van een koorde en een raaklijn aan de grafiek van de betrekkende functie). Voor de conceptuele kennis en de onbekendheid met dit soort opgaven moeten onze deel-nemers de diepte in van hun afgeleide-schema in het langetermijngeheugen. Ze worden ook nog eens door de schijnbare eenvoud van de opgave verrast. Leerling Rob kon de opdracht niet oplossen en verzuchtte: '*Ik dacht: die opgave ziet er kort uit, dan zal het ook wel makkelijk zijn. Maar dat valt toch tegen.*'

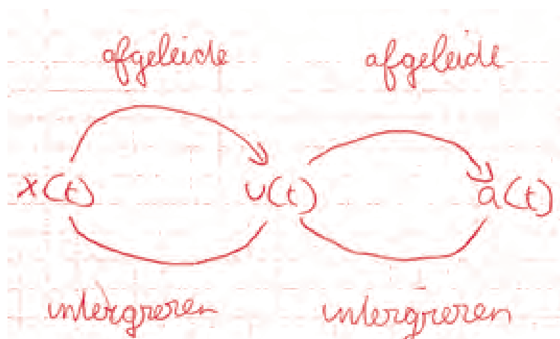
Leerlingen aan het werk

Wij hebben de remweg-opgave in twee verschillende onderzoeken gebruikt. In het ene onderzoek werd de opgave voorgelegd aan vwo-6-leerlingen uit de N-profielen. Zonder uitzondering gaven alle leerlingen een correct antwoord bij opdracht a. Ze konden dus goed herkennen dat de functie een weergave is van hoe er bij een bepaalde snelheid een bepaalde remweg hoort. Maar ze hadden grote moeite met het interpreteren van de afgeleide.
Van de 14 leerlingen die deze opdracht maakten, kwamen er drie tot een goede interpretatie van $R'(80)$. Hieronder volgen eerst enkele passages uit het werk van Otto, een leerling die in opdracht b vastloopt, en Julia, een leerling die wél tot een goede interpretatie komt [4].

Otto is volgens zijn wiskundedocent een gemiddelde maar serieuze leerling. In de volgende passages worstelt Otto: hij probeert bepaalde schema's te activeren en zijn kennis te koppelen aan de opdracht. Eerst probeert Otto kennis toe te passen die hij bij het vak natuurkunde heeft geleerd, dus een 'natuurkunde-schema': er was iets met de eerste afgeleide (snelheid) en de

S = afgeleide weg
V = S' = snelheid
a = S'' = versnelling
S = V·T

figuur 3



figuur 4

tweede afgeleide. Otto zegt dat de tweede (afgeleide) de 'afgelegde afstand' is, maar hij bedoelt waarschijnlijk 'versnelling'; hij refereert namelijk aan een aantekening uit de wiskundeles. Zowel in Otto's wiskunde-schrift als in zijn natuurkunde-schrift wordt het verband tussen afgelegde weg, snelheid en versnelling schematisch in beeld gebracht (***zie figuur 3 en figuur 4***). Het lijkt alsof Otto dit haast fotografisch onthouden heeft.

Otto: *Volgens mij was de eerste afgeleide de formule voor snelheid en de tweede is voor afgelegde afstand, of zoiets dergelijks… Ik weet niet of dat alleen zo geldt met formules, waarbij je kijkt naar een bepaalde afstand. Want daar was… een bepaalde afstand… en dan was de eerste afgeleide dan de snelheid* [schrijft onder elkaar op: *x, x'* en *x''*] *en de tweede was dan de afgelegde afstand. Mijn wiskundeleraar* [noemt naam] *heeft het ooit wel eens allemaal opgeschreven, wat het allemaal was. Met dat differentiëren wat alles was.*
Gerrit: *Heb je nog ideeën over onderdeel c?*
Otto: *Bij de dubbele afgeleide zit het…* [denkt] *Met de eerste afgeleide bereken je ook het minimum of het maximum. Het zou ook kunnen dat je dan de minimale of maximale… ja daar ben ik het meer mee eens… dat je iets van de minimale of maximale remsnelheid… of remweg… maar ik vind het vreemd… het zou nooit kunnen dat 1,15 de maximale of minimale remweg is… dat lijkt me wel heel apart.*

Gerrit*: Dat je maar zo'n klein stukje nodig hebt om te remmen?*
Otto: *Als remweg lijkt me dat sterk, maar met de eerste afgeleide kun je minimum of maximum berekenen, en waarschijnlijk is dit dan het minimum. Dus dan zou je bij een snelheid van… wat is dit… de minimale remweg zou dan 1 meter 15 zijn, wat ik heel raar zou vinden.*

We zien dat Otto diep in zijn hersenen graaft naar zijn kennis rondom 'de afgeleide' en deze kennis in verband probeert te brengen met de functie uit de opdracht. Hij verbindt de remweg met concepten uit de natuurkunde zoals 'de afgelegde weg', 'snelheid' en 'versnelling'. Daarna probeert hij het met extreme waarden. Duidelijk blijkt dat de schema's bij Otto uit loshangende fragmenten bestaan en dat hij ze niet met elkaar in verband kan brengen.
Dat is anders bij Julia, een goede, hard-werkende vwo-6-leerlinge. In eerste instantie hangt zij ook vast in een natuurkunde-schema, maar ze blijft twijfelen omdat het negatieve teken van een vertraging ontbreekt. Vervolgens heeft zij een klein beetje hulp nodig om tot een slimme aanpak te komen.

Julia: *Dit is de vertraging, hoe zeg ik dat,… de versnelling? Ja, het is feitelijk de vertraging in meters per seconde. Je moet dit zien als een negatieve versnelling* [kijkt twijfelend].
Gerrit: *Kun je meer vertellen van hoe ik dit moet zien?*

Julia: *Ja, je hebt de verandering van snelheid. Maar dit is een beetje raar, dat dat getal positief is, want met een remweg zal je altijd… de snelheid neemt af, dus dan zou ik denken dat hij negatief moet zijn… Ik weet niet waarom hij positief is…*
Gerrit: *Dus je denkt een vertraging van 1,15 meter?*
Julia: *1,15 meter per seconde kwadraat. Dat is wat ik denk. Ja, in feite, ik kan niet iets anders verzinnen dan een vertraging. De remweg verschilt natuurlijk… hoe snel hij rijdt? Het gaat per snelheid* [maakt een handbeweging met de pen over het papier].
Gerrit: *Zojuist maakte je een beweging met je pen, alsof je wilde gaan schrijven…?*
Julia: *Oh, ik wilde, misschien een grafiek, zodat ik het beter kan zien…* [lacht] *Maar ik zie niet dat dat nodig is. Wil je dat ik nog meer tijd aan deze opgave besteed?*
Gerrit: *Ja, ja, ga door.*
Julia: *Okee. Dan is R aan deze kant, en hier is de v* [tekent assenstelsel]. *Dan zou de grafiek zoiets…* [schetst grafiek]
Als ik dit zou differentiëren, dan… dan! … dan krijg je… als hij zo zou lopen…! [verheft haar stem] *Oh, dit is de toename in de remweg bij 80 kilometer per uur! Als hij iets harder rijdt, okee, dat is het! Dit betekent, dat met een snelheid van 80 kilometer per uur, als…met één kilometer sneller… dan wordt de remweg 1,15 meter meer* [kijkt tevreden].
Gerrit: *En waarom denk je dit nu zo opeens?*
Julia: *Als je het tekent, dan is het gewoon logischer. De R' is de richtingscoëfficiënt, en die neemt toe. Dat betekent dat, op dit punt, als je harder rijdt, je remweg toeneemt met 1,15.*

In eerste instantie probeert Julia, net als Otto, betekenis te geven vanuit natuurkundige begrippen als versnelling en vertraging. Een belangrijk moment is de onafgemaakte uitspraak: *'...de remweg verschilt natuurlijk... hoe snel hij rijdt? Het gaat per snelheid...'* Op dat moment beseft Julia dat niet de tijd de onafhankelijke variabele is, maar de snelheid. Met de grafiek op papier komt vervolgens de doorbraak. Julia legt een link met 'toename per éénheid' en ook met 'richtingscoëfficiënt'.

Leerlingen die in opdracht b vastliepen konden vaak ook weinig melden over opdracht c, de betekenis van $R''(v) > 0$. Otto zegt bijvoorbeeld: '*bij de dubbele afgeleide heb je een buigpunt, daar zou bij een bepaalde snelheid het teken omklappen, dan zou de snelheid dus negatief zijn, dus daar zou hij weer achteruit gaan.*'
Twee leerlingen weten bij opdracht c een betekenisvol antwoord te geven, waaronder Julia: '*hoe meer snelheid je maakt… dat je remweg dan altijd langer wordt. De toename is positief.*'

Natuurkundedocenten aan het werk
We hebben de remweg-opgave ook voorgelegd aan natuurkundedocenten, als onderdeel van een onderzoek naar de aard van de wiskundekennis die leerlingen opdoen in aangrenzende vakken zoals natuurkunde en economie. Hieronder presenteren we enkele passages uit de interviews met de natuurkundedocenten. Welke mentale schema's komen naar voren bij deze docenten?
De eerste natuurkundedocent is ook wiskundedocent. Wat we bij hem zien, en dit zagen we bij alle natuurkundecollega's, is de scherpte op de meeteenheden.

D1: [leest de opgave en streept de *s* door van 'meters' in de opdrachttekst] *Ik vind het trouwens ook een beetje raar, de remweg R in meter. Ja, dat hoef je er niet bij te zetten. Het is gewoon de remweg R. Of je dat nu uitdrukt in centimeter, of in voeten, dat maakt eigenlijk geen verschil. Wat je bij wiskunde vaak doet, is eigenlijk niet praten over de grootheid zelf maar over de grootheid gedeeld door een of andere maatstaf, meter.*
[leest de vraag verder, mompelt de vraag:] *R 100 is 80… De remweg bij een snelheid van 100 km per uur is 80 meter.*
R accent 80 is 1,15. Oei, dat is dus hoeveel de remweg toeneemt per km per uur. Dat lijkt me zeer ongelukkig, maar het kan. Dus als je 80 rijdt en je kijkt dan wat de snelheidsverandering van 1 kilometer per uur betekent voor de remweg, dan is het deze toename. Dus een beetje slordig gezegd: als je nu 81 gaat rijden in plaats van 80 kilometer per uur, dan is je remweg met 1,15 meter toegenomen.

Uit bovenstaand fragment blijkt dat deze docent geen enkele moeite heeft het juiste antwoord te geven op de vragen; hij beschikt over een uitgebreid afgeleideschema en formuleert het antwoord van opdracht b in termen van een soort 'marginale remweg' (met een discrete toename van de snelheid met 1 km/uur).
Zijn opmerking over het gebruik van eenheden typeert een van de verschillen tussen natuurkundigen en wiskundigen. Bij natuurkunde komen antwoorden zonder eenheid niet voor en daarnaast worden formules afgeleid door gebruik te maken van de eenheden van de gegeven grootheden.
Deze natuurkundige werkwijze probeert de volgende docent te gebruiken.

D2: *Nee, nee… Remweg is afstand…* [schrijft dit op] *Dat is een parabolische functie, dat weet ik. Wat zit er ook alweer achter? Hier zit W is F keer s… ofwel s is W gedeeld door F. Dan heb ik de kracht… W is… ½mv²* [schrijft op]. *Die mag je constant zeggen* [doelt op *m* en *F*].
Die ½mv²… daar zit die kwadraat in. Dit is meters, dit is meters per seconden. Als je daar de afgeleide van neemt, dan is dat dus… ja die a heb ik wel duidelijk.
Die b, dat is m gedeeld door meters per seconde. Nee, daar komt secondes uit. Wat grappig! Dit is gewoon de tijd? Nee, dat kan nooit 1,15 seconden zijn. In uren. Nee dat kan ook niet. Ik heb hier echt moeite mee. We gaan gewoon eens even de R(v) opschrijven. Dan komen we gewoon… je hebt de tijd, hè?

Docent 2 besteedde 20 minuten aan de uitwerking van deze opgave met een methode uit de natuurkunde: de eenhedenanalyse van de formules. Het leidde niet tot een zinvol antwoord. Daarnaast valt ook op wat deze docent *niet* doet. Hij maakt bijvoorbeeld geen gebruik van een schets van de grafiek of van een redenatie rondom 'de verandering op een klein interval'. Hoewel hij deze kennis als eerstegraads natuurkundedocent ongetwijfeld ergens heeft opgeslagen, wordt het niet aangeboord. Blijkbaar is zijn natuurkundeschema met de eenhedenanalyse zo sterk, dat het andere schema's in de weg zit.
Een ander sterk natuurkunde-schema hangt samen met de conventie bij natuurkunde van het gebruik van formules met een tijdsvariabele. Eén van de docenten geeft aan moeite te hebben met de remweg uitgedrukt in de snelheid, omdat bij natuurkunde vaak de tijd de onafhankelijke variabele is. Het volgende fragment met een derde natuurkundedocent illustreert dit:

D3: *Bij 100 km per uur is de remweg 80 meter neem ik aan. Ja.* [leest nadenkend vraag b] *Deze notatie kent een leerling niet bij natuurkunde* [wijst naar *R'*]. *Dit zou moeten betekenen dat de versnelling, de*

remvertraging dus, bij een snelheid van 80 kilometer per uur, gelijk is aan 1,15. Ja. En de eenheid? … Dat is heel gek. R accent is toch de afgeleide van de remweg, dat is de snelheid… Wat gek! Als je de remweg gaat differentiëren, dan krijg je de snelheid en dan moet je hem differentiëren aan de tijd. En nu differentieer je naar de snelheid, dat doen we bij natuurkunde nooit.

Het natuurkunde-schema van een remweg (afgelegde weg) die afhangt van de tijd zit sommige natuurkundedocenten in de weg om tot een zinvolle interpretatie van de afgeleide in opdracht b te komen. Hetzelfde schema zien we ook bij de leerlingen, die op een zelfde wijze met de opdracht worstelen.

Conclusies

Uit het voorgaande blijkt dat de kennis rondom 'de afgeleide' een ingewikkelde zaak is. Er komen veel zaken bij kijken, en de deelnemers hebben elk hun eigen voorkeuren voor grafische, symbolische of numerieke representaties, voor een continue of discrete aanpak, en voor verschillende contexten. De remweg-opgave leent zich, juist omdat er geen getallen uitkomen, goed om te redeneren over 'de afgeleide'. Het voorbeeld van Julia liet zien dat een eenvoudige *heuristiek* als 'schets de grafiek van de functie' een doorslaggevende ondersteuning biedt om de variabele v met R' en de context te verbinden. Ook zien we dat een klakkeloos gebruikt natuurkunde-schema (de afgeleide van de afgelegde weg is de snelheid) flink dwars kan liggen.
Ons viel verder op dat de geïnterviewde natuurkundedocenten de opdracht heel positief beoordeelden in de nabespreking van de opgaven. Ze waardeerden hoe de opdracht je laat nadenken over een niet-standaard-probleem. Ter afsluiting laten we Docent 2 nogmaals aan het woord:

D2: [pakt de remweg-som erbij] *Wat jij hier dus had, dat maakt het hele verhaal erg interessant. Je had dus niet de tijd, maar de snelheid op de x-as. Wooow! … Je hebt gezien hoe ik daar heb zitten rotzooien. Bij deze opgave is er meer aan de hand dan gewoon. Dat vond ik wel leuk trouwens, dat wijst mij er ook weer op dat het niet allemaal zo vanzelfsprekend is.* […] *Het is wel typisch een wiskundige die op het idee komt om dat te gaan doen. Dat is voor ons helemaal niet interessant.*

Noten

[1] J.S. Meyer (1963): *Wiskundige capriolen*. Utrecht/Antwerpen: Het Spectrum.
[2] J.D. Bransford, A.L. Brown, R.R. Cocking (2000): *How People Learn; Brain, Mind, Experience and School.* Washington, DC: National Academy Press.
[3] Deze opgave is ontleend aan: Jan Bezuidenhout (1998): *First-year university students' understanding of rate of change.* In: *International Journal of Mathematics Education in Science& Technology, 29*(3); pp. 389-399.

[4] Voor de leesbaarheid hebben we de letterlijke formulering in de interviews bewerkt.

Over de auteurs

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Hij doet onderzoek naar het leerproces van leerlingen van het begrip afgeleide.
E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*
Nelleke den Braber is wiskundelerares aan het Alfacollege in Groningen. Zij verricht als leraar-in-onderzoek aan de Rijksuniversiteit Groningen een onderzoek met de titel 'Hellingen, snelheden en marginale kosten'.
E-mailadres: *n.s.den.braber@rug.nl*
Pauline Vos is onderzoeker naar wiskundeonderwijs aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *f.p.vos@rug.nl*

Oproep / Gezocht: Eerstegraadsleraar wiskunde met historische belangstelling

Het Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen (BWNW) is een digitaal wetenschappelijk naslagwerk waarin korte levensbeschrijvingen van overleden Nederlandse wiskundigen zijn opgenomen. De redactie van het BWNW zoekt een eerstegraadsleraar wiskunde met historische belangstelling die bereid is om één dag in de week onderzoekswerkzaamheden te verrichten met betrekking tot de verdere ontwikkeling en het gebruik van de BWNW-website. Het is de bedoeling dat het onderzoek wordt gedefinieerd in overleg met de redactie en dat vervolgens een aanvraag wordt ingediend in het kader van het NWO-programma Leraar in Onderzoek (LiO).

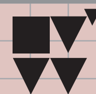
Voor het BWNW zie *www.bwnw.nl*
Voor het programma Leraar in Onderzoek zie *www.nwo.nl/lio*
Voor meer informatie wende men zich tot Gerard Alberts (*galberts@science.uva.nl*) of Teun Koetsier *(t.koetsier@few.vu.nl).*

Aankondiging / Congres BRIDGES, Leeuwarden

[Rinus Roelofs]

Van 24 t/m 29 juli 2008 vindt het Internationale Congres BRIDGES plaats in Leeuwarden. Deze conferentie is sedert 1998 een jaarlijks internationaal platform voor kunstenaars en wetenschappers die zich op het grensvlak van wetenschap, kunst en techniek begeven. Rond de 250 wetenschappers en kunstenaars vanuit diverse delen van de wereld komen in 2008 voor ongeveer een week naar Leeuwarden om deel te nemen aan een breed opgezet programma over 'mathematical connections in art, music, architecture and science'.
De eerste conferenties vonden plaats op het Amerikaanse continent, maar intussen doet BRIDGES mede door de toenemende brede internationale betrokkenheid ook Europa aan. In 2006 is Londen opgetreden als gastheer en in 2007 vond het congres plaats in de Spaanse stad San Sebastian.
Het programma omvat onder andere presentaties van ingezonden papers, exposities en 'workshops for teachers'.
Naast de drie standaard congresdagen op 24, 25 en 27 juli is er voor zaterdag 26 juli een excursiedag gepland. Op deze dag wordt een aantal bijzondere exposities bezocht die zijn ingericht in middeleeuwse kerkjes rondom Leeuwarden.
Ter afsluiting is er op maandag 28 juli een speciale Escher-dag georganiseerd.

Meer informatie is te vinden op *www.bridgesmathart.org* en op *www.sprezzatura.org/front_nieuws.php?id=12*



De zoektocht naar de Wiskundige Vakvaardigheden

HET VERVOLG VAN WISKUNDELERAAR VAKVAARDIG

[Marianne Lambriex, Monica Wijers, Vincent Jonker]

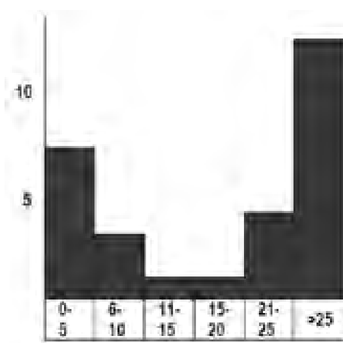
Samenvatting
Er is er een start gemaakt met de discussie over een mogelijk beroepsregister voor alle docenten, naar aanleiding van het in werking treden van de wet BIO (beroepen in het onderwijs). De NVvW heeft het initiatief naar zich toegetrokken om uit te zoeken wat een beroepsregister voor docenten wiskunde zou kunnen inhouden, en wat dat voor gevolgen heeft voor onder andere professionalisering. Het onderzoek wordt afgerond in het voorjaar van 2008. Hieronder enkele voorlopige resultaten. Het totale traject van invoering van een beroepsregister zal overigens enkele jaren in beslag nemen. Dit artikel is het tweede van een serie over beroepsstandaarden voor wiskundeleraren [1] en gaat over de zoektocht naar de kwaliteiten die een wiskundeleraar onderscheiden van een leraar in een willekeurig ander vak.

Vakvaardig

Een beroepsregister voor docenten wiskunde is een kwaliteitsinstrument in handen van de beroepsgroep zelf. Het is een instrument waarmee de beroepsgroep zich kan profileren en dat kracht uitstraalt. Het is niet zomaar een lijstje van bevoegde docenten, maar presenteert wiskundeleraren met kwaliteiten. Welke vakspecifieke kwaliteiten dit zijn, is aan de beroepsgroep zelf om te bepalen.
Het beantwoorden van deze vraag is een noodzakelijke eerste stap om een beroepsregister voor wiskundedocenten op te kunnen richten. Vandaar dat de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakvaardig) [2] een zoektocht gestart is naar de kwaliteiten die de wiskundeleraren zelf belangrijk vinden.
Op zoek naar wat een wiskundeleraar onderscheidt van een bijvoorbeeld een leraar Nederlands hebben we allereerst leraren en leerlingen bevraagd, experts geïnterviewd, lerarenopleiders bezocht, workshops gehouden en enquêtes afgenomen. Ook hebben we overleg gevoerd, gecoördineerd door SBL, met andere vakverenigingen die met dezelfde vraag bezig zijn. Daarnaast hebben we een beperkt aantal internationale bronnen geraadpleegd.

Leraren

In werkgroepen en via een online enquête hebben ruim 40 docenten antwoord gegeven op de vraag welke vakspecifieke kennis en vaardigheden hen onderscheidt van een docent in een ander vak. Opmerkelijk in deze zoektocht is dat de leraren zelf in eerste instantie vaak vinden dat er geen verschil is met andere vakdocenten.
In de enquête geven 8 van de 30 respondenten aan dat niets of alleen het vakgebied en de kennis daarvan (vakkennis) onderscheidend zijn.
De online enquête is ingevuld door 31 docenten, meest havo/vwo, waarvan ongeveer een derde deel vrouw. De gemiddelde leeftijd is 50 jaar (jongste 26, oudste 64); aantal jaren ervaring, in een grafiekje:



Als er wordt doorgevraagd en de docenten vaardigheden noemen, blijken er wel degelijk ook andere vakspecifieke vaardigheden naar voren te komen dan alleen de kennis van het vakgebied wiskunde.
Vaak genoemd worden bekwaamheden op het gebied van vakdidactiek en leerprocessen; sterke nadruk ligt daarbij op het kunnen inleven in het denken van de leerling en goed kunnen uitleggen. Enkele citaten van docenten:

- Juist voor wiskunde is het van wezenlijk belang dat de docent in staat is heel helder en duidelijk uit te leggen.
- Aandacht voor maatwerk in uitleg.
- Een goede docent wiskunde heeft veel inzicht over op welk niveau een leerling logisch en abstract kan denken.
- In staat zijn denkproces/logica van leerlingen te stimuleren.

Leerlingen

Ook zijn we in gesprek gegaan met leerlingen; zij zijn bij uitstek in de gelegenheid de verschillende vakdocenten op hun al dan niet aanwezige en gewenste vakspecifieke kwaliteiten te onderscheiden. Zij vormden een rijke bron. Als eerste kwam naar voren dat '*de wiskundeleraar zelf de stof moet beheersen en heel goed moet weten wat al eerder behandeld is.*'
Ook heel belangrijk vinden ze de uitleg.
Een wiskundedocent moet de stof op verschillende manieren kunnen uitleggen, bij de andere vakken zijn het meestal regeltjes die vast staan en waar geen uitleg bij nodig is, alleen maar weten dat het zo is. De wiskundeleraar moet dan ook de 'kunst van het uitleggen' beheersen. Hij moet geduld hebben en begrip kunnen opbrengen als de leerling het niet meteen snapt, moet de leerling het vertrouwen geven dat het wel gaat lukken.
Dit vonden de leerlingen voor de andere vakdocenten minder belangrijk, want ze moeten in de wiskundeles steeds een stap verder en moeilijker, dat kost tijd en ze snappen het niet meteen zoals bij veel andere vakken wel. Een van de leerlingen verwoordde het heel mooi:
Een wiskundeleraar moet in mijn hoofd kunnen kruipen; moet dus de denkwijze van

de leerling snappen en uitzoeken waar de fout in de redenering zit.

Experts

De zoektocht naar de bekwaamheden van de wiskundeleraar heeft met de reacties van docenten en leerlingen al een aardig lijstje opgeleverd. Daarnaast zijn er ook interviews gehouden met enkele experts op het gebied van wiskundeonderwijs en vakdidactiek. Deze leverden weer aanvullende bekwaamheden op, getuige de volgende citaten:

- *Het vak wiskunde heeft (anders dan de andere bètavakken) een hiërarchische opbouw met een aantal kernconcepten die voor 100% beheerst moeten worden voor je ermee verder kunt. De kennis die bij deze kernconcepten hoort, moet een leerling voortdurend paraat hebben. Is dat niet het geval dan stort het bouwwerk in. De docent moet deze essentiële concepten beheersen, overzien en de samenhang kennen en voortdurend hierop terugkomen gedurende de les.*
- *Het vak wiskunde heeft een sterk vakdidactisch concept: Weten dat, Weten hoe, Weten waarom en Weten over weten. Met name het begrip transfer; dit moet geleerd worden om in andere situaties te gebruiken.*
- *Wiskunde wordt toegepast in andere vakken, vooral in bètavakken, denk bijvoorbeeld aan mechanica. De concepten daaronder moet een docent kennen en beheersen. Hij moet deze t.b.v. de leerlingen decontextualiseren en vervolgens abstraheren. (Dit kom je bij talen en economie niet tegen.)*
- *De wiskundeleraar moet leerlingen leren omgaan met de kwantitatieve kant van onze maatschappij, hij moet leerlingen niet alleen het getalbegrip bijbrengen maar ook gecijferdheid.*

En ook de leertheorieën komen dan aan bod:

- *De wiskundeleraar kan aansluiten op informele of preformele wiskundekennis van de leerling en de leerling in de zone van zijn of haar naaste ontwikkeling begeleiden.*

Lerarenopleiders

Op advies van de lerarenopleiders betrekken we in ons onderzoek ook de kennisbasis en de PML-eindtermen, waarin uitvoerig uitgewerkt is over welke vakkennis en vaardigheden op welk niveau een beginnend wiskundeleraar aan het eind van de opleiding moet beschikken. (PML staat voor procesmanagement lerarenopleidingen.) We kunnen dus zeggen dat we bij de initiële registratie in een beroepsregister van deze startbekwaamheden uitgaan. Voor de registratie in het beroepsregister wordt hierop voortgebouwd.

Vakkennis, Leerprocessen en vakdidactiek, Toetsing, Omgevingsfactoren

De zoektocht heeft zo een uitgebreide lijst opgeleverd. Op basis van deze lijst uit de praktijk zijn we door ordenen, herformuleren en indikken gekomen tot 16 wiskunde-competenties. Deze zijn in overleg met de andere 'zoekende' vakverenigingen ingedeeld in vier categorieën: Vakkennis, Leerprocessen en vakdidactiek, Toetsing, Omgevingsfactoren (context) en zo precies mogelijk geformuleerd. Ze zijn alle 16 toegelicht met voorbeelden en verdere uitwerkingen (zie voor een enkel voorbeeld de opsomming ***in het kader***).

Onderdeel 1 - Vakkennis; een voorbeeld
De hier genoemde standaard heeft betrekking op de leerstof van de wiskundevakken en de bijbehorende vakdidactiek die tot het terrein van de bevoegdheid horen.
Een docent wiskunde:
- Beheerst de leerstof in perfectie.
  - Kan ieder reken/wiskundig probleem uit de schoolwiskunde, inclusief examens, oplossen.
  - Kent de werk- en denkwijzen die eigen zijn aan de wiskunde.

Onderdeel 2 - Leerprocessen en vakdidactiek; een voorbeeld
Een docent wiskunde:
- Kan beargumenteerd zijn onderwijs vormgeven en daarbij verschillende werkvormen, leervormen en materialen ontwikkelen en inzetten.
  - Besteedt aandacht aan zowel hoofdlijnen (samenhang, overzicht) als aan details (opgaven, procedures).
  - Geeft het voorbeeld hoe een probleem aan te pakken en op te lossen.
  - Weet wanneer en op welke manier concrete materialen het leren van wiskunde kunnen ondersteunen.
  - Kan rekenmachine, grafische rekenmachine en computerprogramma's voor wiskunde functioneel inzetten ter ondersteuning van het leerproces.

Onderdeel 3 - Toetsing, beoordeling en evaluatie; een voorbeeld
Een docent wiskunde:
- Kan bij verschillende soort vaardigheden een passende toetsvorm kiezen en ontwerpen zoals: schriftelijk, mondeling, praktische opdracht, computertoets, practicum, geïntegreerde wiskundige activiteit.

Onderdeel 4 – Omgevingsfactoren; een voorbeeld
Een docent wiskunde:
- Heeft goed inzicht in de vooropleiding en vervolgopleiding voor wat betreft rekenen/wiskunde.
  - Heeft kennis van de achtergronden, inhoud en didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool.
  - Kent globaal de reken/wiskunde onderdelen van de CITO-eindtoets basisschool.
  - Is op de hoogte van het gebruik van entreetoetsen en aansluitprogramma's in het vervolgonderwijs en kent globaal de inhoud.

In dit proces hebben we de 'ruwe' data ook gelegd naast andere bronnen, waaronder: bekwaamheden beschreven door andere vakverenigingen, bekwaamheden van wiskundedocenten uit andere landen ('professional standards') onder andere de USA en Australië, en de eerder genoemde kennisbasis voor de lerarenopleiding.
Om het competent zijn te kunnen vaststellen zijn er vervolgens indicatoren geformuleerd die concreet gedrag beschrijven dat past bij een bepaalde competentie. Dit geheel is vervolgens aan alle geledingen toegestuurd en besproken. Dat leverde boeiende discussies en heel veel vragen. Hieronder volgt een greep daaruit:

- Hoe ver moet een wiskundeleraar boven de stof staan, een hoofdstuk voorlopen? Of ook de stof van het mogelijke vervolgonderwijs beheersen?
- Zijn de competenties op het gebied van de didactiek en leerprocessen niet tendentieus? Kan elke wiskundeleraar zich hier in vinden? Ook degene die heel consciëntieus met het boek de leerlingen goed voorbereidt op het examen?
- Hoort ontwerpen van leerstof niet eerder bij de experts thuis? Het vormgeven van onderwijs kan ook door een goede keuze te maken uit de voorhanden zijnde leerstof, je hoeft niet per se zelf te kunnen ontwikkelen.
- Moet een docent alle competenties tot in perfectie tonen of een deel ervan en welk deel dan?
- Is dit niet teveel? En gelden deze standaarden voor vmbo-havo-vwo-mbo-docenten?
- Hoe bewijs ik dat?

In een volgend artikel gaan we verder in op de laatste opmerking, dat zal gaan over indicatoren en welke bewijzen er aan de gevonden competenties te koppelen zijn.

Tot slot

Dit artikel is ingestuurd op 4 maart j.l. en de projectgroep is nog bezig met de afronding. Als u dit leest zijn we mogelijk al een vervolgtraject opgestart. Als het rapport per 1 april aan het bestuur wordt overgedragen, is het ook op de NVvW-website (*www.nvvw.nl*) voor u beschikbaar. Dit is pas een start; er is nog veel werk te doen. Helpt u mee?
Gedurende het jaar gaat u zeker nog meer hierover in de media vernemen en ook van ons project, via *Euclides* en via de website.

Nadere informatie kan verkregen worden via de projectgroep WiVa (Marianne Lambriex, Monica Wijers, Vincent Jonker, Natalie van der Veen), per e-mail (*m.lambriex@nvvw.nl*).

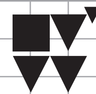
Noten

[1] Het eerste artikel van deze serie is gepubliceerd in het vorige nummer van *Euclides*, 83(5), maart 2008; pp. 280-281.

[2] WiVa. Het bestuur van de NVvW heeft de projectgroep WiVa samengesteld, waarin ook SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) en het Freudenthal instituut participeren. Doel is beroepsstandaarden voor wiskundeleraren te ontwikkelen, en tevens registratiecriteria voor opname in het lerarenregister en vakspecifieke eisen voor continue professionalisering te ontwikkelen. De projectgroepleden zijn Marianne Lambriex (NVvW), Monica Wijers (FI) en Vincent Jonker (FI) en vanuit SBL participeert Natalie van der Veen.

Examenbesprekingen 2008

[Grada Fokkens en Conny Gaykema]



VMBO TGK
maandag 26 mei 2008 / 15.00-18.00 uur

ALKMAAR
OSG Willem Blaeu
Robonsbosweg 11 (072-5122477)
mw. V. Smit (*d.smit-bruin@atlascollege.nl*)

BURGUM
CSG Liudger
Tj.H. Haismastraat 1 (0511-460260)
mw. G. Tack Althof (058-2572388)

GRONINGEN
Noorderpoort College
Van Iddelingeweg 140 (050-3656702)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-4552511) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
dhr. E. Smid (038-4653400)

ZEIST
KSG De Breul
Arnhemsebovenweg 98 (030-6915604)
dhr. P. de Haas (*pauldehaas@planet.nl*)

ZWOLLE
Thorbecke SG
Dr. C.A. van Heesweg 1 (038-4564540)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

HAVO A12
vrijdag 30 mei 2008 / 16.00-18.00 uur
HAVO B1 / B12
donderdag 22 mei 2008 / 15.30-18.00 uur

AMERSFOORT
S.G. Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: dhr. F.O. van Leeuwe (0341-492843)
B: dhr. J.S. Dominguez (06-10397591)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)
A: dhr. N.M. Admiraal (072-5340613)
B: dhr. S.T. Min (0229-237756)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: dhr. J.P.C. v.d. Meer
B: dhr. R.J. Klinkenberg (070-3559938)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)
B: mw. H. Lüder (0516-432889)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
A: dhr. R. van Oord (0182-617089)
B: dhr. H.J. van Lien (010-5113530)

ZWOLLE
Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-4225202)
A: dhr. C. Alderliesten (038-4657244)
B: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)

VWO A1 / A12
woensdag 21 mei 2008 / 15.30-18.00 uur
VWO B1 / B12
vrijdag 30 mei 2008 / 15.30-18.00 uur

AMERSFOORT
SG Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: dhr. M.W.M. Röling (033-4555031)
B: dhr. A.B. v.d. Roest (0318-543167)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)
A: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)
B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

Regio Arnhem: ROZENDAAL
Het Rhedens
Kleiberglaan 1 (026-3646845)
A: dhr. A.W.M. Tromp (026-3254829)
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: voorzitter nog niet bekend [2]
B: dhr. J. Remijn (070-3684525)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: mw. N. den Braber (050-5893847)
B: mw. O. Eringa (0512-519160)

's-HERTOGENBOSCH
Ds. Pierson College
G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
(*NS Den Bosch-OOST*)
A: geen bijeenkomst
B: dhr. H.J. Kruisselbrink (073-5216386)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
A: mw. A.E.L. de Jongh Swemer
(010-4138432)
B: dhr. G. de Jong (0118-628903)

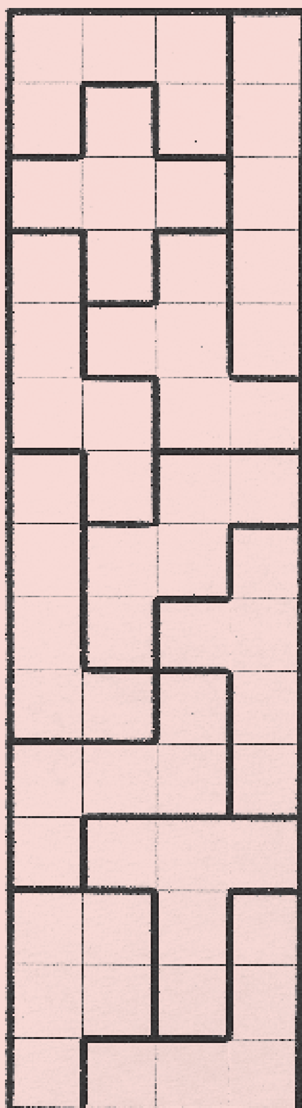
ZWOLLE
Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-4225202)
A: mw. A. C. H. Gieles (038-4656988)
B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

Noten
[1] Parkeren op parkeerterrein Almeria-erf 8 is toegestaan.
[2] Kijk op de website (*www.nvvw.nl*) of de bespreking doorgang vindt.

PUZZEL 83-6

Pentomino-puzzels

[Frits Göbel]


figuur 1

Ik weet dat deze 'blokjes-puzzels' niet ieders favoriet zijn, maar de overigen hebben er nu lang genoeg op gewacht!

De opgaven gaan over betegelingen met twee soorten tegels, die beide moeten worden gebruikt.
In figuur 1 ziet u de 12 pentomino's. Ze worden gewoonlijk met een letter aangeduid, eventueel gevolgd door het cijfer 5. Linksonder staat de P5, rechtsonder V, en dan van onder naar boven T, Z, Y, L, W, N, F, I, X, U.
In figuur 2 zien we I2, I3 en O4.

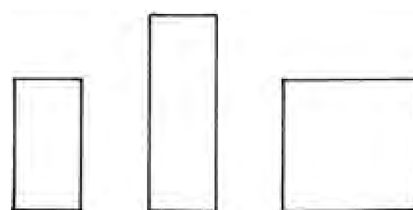
Opgave 1
Betegel voor ieder van de pentomino's een rechthoek met één of meer kopieën van de pentomino en van I2. Streef hierbij steeds naar een rechthoek met een zo klein mogelijke oppervlakte.

Dat zijn dus in feite 12 opgaven waarvan de meeste triviaal zijn. De som van de oppervlakten in mijn oplossing is 158.
Het is niet nodig om tekeningen in te sturen. Het is al voldoende om, voor iedere pentomino, de afmetingen van uw rechthoek te geven.

De volgende opgaven zijn minder eenvoudig.

Opgave 2
Bepaal een rechthoek die kan worden betegeld met I3 en Z5.

Opgave 3
Bepaal een rechthoek die kan worden betegeld met O4 en T5.


figuur 2

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 16 mei.
Veel plezier!

Oplossing 83-4

Stochastische wandelingen

Ook deze keer was er een verrassend groot aantal inzendingen: 23, waarvan 20 geheel foutloos! De inzenders waren Monica Woldinga, Jozef Hanenberg, Ton Kool, Leo van den Raadt, Jan Verbakel, Gé Groenewegen, Kasper Meerhof, C.M. van der Straaten, Hans Linders, Kees Verhoeven, Henk van Weers, Herm Jan Brascamp, Frans Lipperts, Harm Bakker, Wobien Doyer, Hub Cilissen, Wim van den Camp, Gerhard Riphagen, Hans Klein, Floor van Lamoen, Jan Meerhof, Lieke de Rooij en Cor Droog. In het algemeen vond men de opgaven eenvoudig.

Het antwoord op *opgave 1* is $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$. Eén inzender dacht even dat er werd gevraagd naar de kans om na $2n$ stappen *voor het eerst* weer in 0 te zijn. Maar hij zag dat deze opgave verreweg de moeilijkste van de vier zou zijn, en dus niet geschikt als 'inkoppertje'. Die opgave kan overigens op elegante wijze worden opgelost met het spiegelingsprincipe; zie bijvoorbeeld Feller, *Theory of Probability*, deel 1, of zoek op internet onder 'ballot problems'.

Het aapje in *opgave 2* is met kans $\frac{7}{128}$ na 8 stappen weer terug in 0. Het gaat hier om splitsingen van {1, 2, …, 8} in twee stukken met gelijke som. Die som is 18, en je kunt dus de partities tellen van 10 in ongelijke termen < 8.
Het principe is hetzelfde als bij de Gouden Ballen van de kerstpuzzel, maar dat realiseerde ik me pas veel later!

Het antwoord op *opgave 3* is $\frac{490}{2^{14}}$. Dit is snel gevonden als je bedenkt dat het aantal stappen van de lengte 3 alleen 2 of 4 kan zijn. Het aantal mogelijkheden is 210 resp. 280. Eén van de inzenders koos Excel voor de oplossing, met het volgende commentaar: 'Misschien is dit niet de aanpak die u zelf in gedachten had, maar we leven tenslotte in de 21ste eeuw.' Ik weet niet wat hier wordt gesuggereerd, maar in welke eeuw dan ook is Excel wel het laatste waarmee ik deze problemen zou aanpakken. Ondanks een bijlage van enige megabytes is het antwoord van de inzender fout.
De inzending van Floor van Lamoen ging vergezeld van een algemene formule voor de kans op terugkeer in 0 na een oneven aantal stappen. Een heel leuk resultaat!

Bij *opgave 4* waren er drie deelnemers die zich afvroegen welke stapgrootten hier zijn toegelaten. De bedoeling was 1 in de diverse richtingen, en die keuze is door iedereen uiteindelijk ook gemaakt, met uitzondering van Jozef Hanenberg. Die ging consequent door met een aap, en gezien de locatie Manhattan viel de keuze op King Kong. De kansverdeling werd vervolgens bepaald voor alle choreografieën uit de vorige opgaven. Een mooi stukje werk!
De gevraagde kansverdeling voor stapgrootte 1 is:
$4096 \times P(n) = 400, 2100, 1344, 252$ voor respectievelijk $n = 0, 2, 4, 6$.
De meesten vonden dit door uitschrijven, maar ook de computer werd door sommigen ingeschakeld. Met Excel ging dat echter niet goed.
Jan Verbakel en Kees Verhoeven bouwden de kansverdeling op in een driedimensionale versie van de driehoek van Pascal. Wobien Doyer tenslotte gaf een algemene uitdrukking, zij het niet in gesloten vorm, voor de gevraagde kansverdeling.

Het feit dat de opgaven niet al te moeilijk waren, werd door sommige inzenders goed opgepakt. Een paar voorbeelden zijn hiervoor al genoemd.
Hans Klein ging met zijn berekeningen in de opgaven 2, 3 en 4 tot 20 stappen.
En Gerhard Riphagen liet al zijn exacte berekeningen vooraf gaan door computersimulaties.
De resultaten stemden gelukkig goed overeen met de berekeningen!

Ladderstand
De kop van de ladder ziet er nu als volgt uit:

H.J. Brascamp 512
J. Meerhof 415
L. de Rooij 393
G. Riphagen 341
L. van den Raadt 261
W. Doyer 236
H. Klein 235
N. Wensink 208
T. Kool 155
K. Verhoeven 129
H.J. van Weers 103
J. Hanenberg 100

SERVICEPAGINA

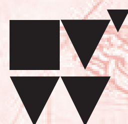
Centrale examens 2008, 1e tijdvak
Regionale examenbesprekingen

	CE	regionale bespreking
vwo A1/A12	ma.19 mei 13:30-16:30u	wo. 21 mei 15:30-18:00u
havo B1/B12	di. 20 mei 13:30-16:30u	do. 22 mei 15:30-18:00u
vmbo TGK	do. 22 mei 13:30-15:30u	ma. 26 mei 15:00-18:00u
havo A12	wo. 28 mei 13:30-16:30u	vr. 30 mei 16:00-18:00u
vwo B1/B12	wo. 28 mei 13:30-16:30u	vr. 30 mei 15:30-18:00u

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

nr.	verschijnt	deadline
7	3 juni	8 april
8	1 juli	15 mei

do 24 april, do. 8 mei, do. 22 mei, Utrecht
Bijscholing Wiskunde D: Analytische meetkunde
Organisatie BEST-Utrecht en FIsme

do. 15 mei, do. 29 mei, do. 12 juni, Utrecht
Bijscholing Wiskunde D: Statistiek en kansrekening
Organisatie BEST-Utrecht en FIsme

zaterdag 17 mei, Utrecht
HKRWO-Symposium XIV: Doen of denken?
Organisatie HKRWO

wo. 18 t/m vr. 20 juni, TU/e Eindhoven
Onderwijs Research Dagen
Organisatie TU/e

vrijdag 20 juni, Utrecht
Bèta onder de Dom, workshops voor bètadocenten
Organisatie Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

vr. 20 t/m di. 24 juni, Maastricht
9e Internationale Mathematica Symposium
Organisatie IMS'08 en TU/e
(http://bmia.bmt.tue.nl/people/BRomeny/IMS2008/EducationDay/main.html)

za. 28 en zo. 29 juni, Blankenberge (België)
14e Congres van de VVWL
Organisatie Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars

zo. 13 t/m vr. 18 juli, RAI, Amsterdam
Fifth European Congress of Mathematics
Organisatie VU, CWI en UvA

do. 24 t/m di. 29 juli, Leeuwarden
Bridges Leeuwarden (11th Bridges Conference): Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture
Organisatie The Bridges Organisation
(www.bridgesmathart.org)

vr. 22 en za 23 augustus, TU/e Eindhoven
vr. 29 en za. 30 augustus, CWI Amsterdam
Vakantiecursus 2008: Wiskunde en profile
Organisatie CWI